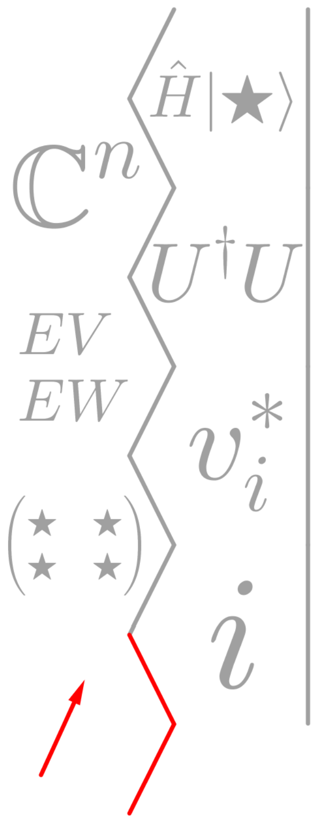
Vektoren

18. März 2019



In der Physik gibt es nicht nur skalare Größen, wie beispielsweise die Masse, die allein durch ihre Größe beschrieben werden. Es gibt auch Größen, die richtungsabhängig sind und genau diesen wollen wir uns in diesem Baustein widmen. Eine für uns wichtige Größe ist beispielsweise der Impuls. Wir werden in diesem Baustein allerdings im Rahmen der klassischen Mechanik bleiben, da wir für die Quantenmechanik über den Tellerrand der reellen Zahlen blicken müssen.

Einstiegsbeispiele

E1 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Summe(n) und die Differenz(en) der beiden Vektoren. Für welche dieser Operationen gilt das Kommutativgesetz? Schreiben Sie die Rechengesetze für Vektoren allgemein an.

E2 Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren aus Aufgabe E1.

E3 Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ der Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Vergleichen Sie dieses mit $\vec{v}_2 \times \vec{v}_2$. Was fällt Ihnen dabei auf?

E4 Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{a}$ aus Aufgabe E1.

E5 Stellen Sie einen Vektor zwischen den beiden Punkten $P(1|4)$ und $Q(-3|-2)$ auf.

1 Vektoren in zwei Dimensionen

Um uns einen ersten Eindruck zu verschaffen, wie man mit Vektoren umgeht, wollen wir uns der Einfachheit halber zuerst auf zwei Dimensionen beschränken. Das schöne daran ist, dass wir alle Rechenregeln, die wir hier kennenlernen auch auf drei oder ganz allgemein auf höhere Dimensionen ausweiten können.
Ein Vektor im Zweidimensionalen wird durch zwei reelle Zahlen beschrieben, wobei die erste den Wert der Größe in x-Richtung und die zweite den Wert der Größe in y-Richtung beschreibt. Geht man beispielsweise 3 Meter nach rechts und 2 Meter nach vorne kann man dies (bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems) durch folgenden Vektor beschreiben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{v}$ wählt dabei allerdings den direkten Weg, wie in Abbildung 1 zu sehen.

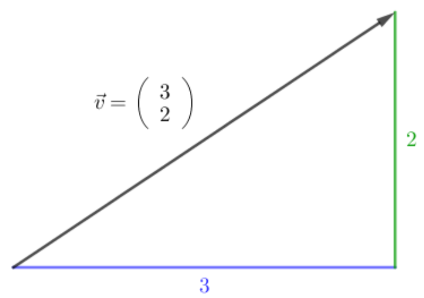


Abbildung 1: Hier ist der Vektor $\vec{v}$ dargestellt.

Doch wie lange ist dieser Weg? Um das herauszufinden, können wir den Satz des Pythagoras anwenden. Die Länge eines Vektors ist eine sehr wichtige Eigenschaft, die uns noch oft in verschiedenen Facetten begegnen wird, wobei man nicht immer von einer Länge sprechen kann. Daher wollen wir einen allgemeineren Begriff wählen.

Der Betrag eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ kann in kartesischen Koordinaten[a] mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes bestimmt werden

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[a]Das Koordinatensystem, welches Sie bereits aus der Schule kennen.

Wir haben nun eine Möglichkeit gefunden zwei Vektoren miteinander zu vergleichen. Wollen wir beispielsweise die Impulse[1] zweier Teilchen vergleichen, so können wir ihre Beträge vergleichen. Ähnliches gilt auch für die Stärke einer Kraft. Wird eine Kraft mit 25 N angegeben, bedeutet dies, dass der Betrag des Kraftvektors $F = |\vec{F}| = 25\,\mathrm{N}$ ist. Eine solche Kraft kann auch mit einem negativen Vorzeichen versehen werden. Dieses wird dazu verwendet um eine Kraft von ihrer Gegenkraft zu unterscheiden, beziehungsweise ganz allgemein ihre Richtung anzugeben.
Nun wollen wir uns ansehen, was passiert, wenn an einem Körper zwei oder mehr Kräfte angreifen. Auch diesen Fall wollen wir anhand eines Beispiels verdeutlichen, siehe dazu Abbildung 2a. Auf den Körper greifen nun die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ an. Um die Gesamtkraft auf diesen Körper zu bestimmen, liegt es nahe beide Kräfte zu addieren. Da die beiden Kräfte allerdings nicht in dieselbe Richtung zeigen, reicht es leider nicht aus die Beträge zu addieren. Wir werden später noch genauer an einem Beispiel sehen, warum dies nicht funktioniert (Ü1). Wie meist in der Physik sind physikalische Größen nicht ortsgebunden, darum kommt uns die Eigenschaft entgegen, dass Vektoren im Raum verschoben werden können. Zwei Vektoren können somit als ident bezeichnet werden, wenn sowohl ihre x-Koordinate als auch ihre y-Koordinate gleich sind.

Zwei Vektoren sind ident, wenn sie gleich lang, gleich gerichtet und gleich orientiert sind.

- Die Länge eines Vektors wird über seinen Betrag bestimmt.
- Die Richtung eines Vektors wird durch seine Koordinaten angegeben.
- Auch die Orientierung kann aus den Koordinaten abgelesen werden. Sie gibt an, ob ein Vektor beispielsweise nach rechts oder links zeigt. Wenn man in jeder Koordinate das Vorzeichen ändert, so ändert man auch die Orientierung des Vektors.

Kommen wir zurück zur Addition zweier Vektoren. Vektoren können addiert werden, indem man sie aneinander hängt, wie in Abbildung 2b zu sehen.

In Abbildung 2b können wir die Koordinaten des Kraftvektors $\vec{F}_{\text{ges}}$ ablesen:

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass sich die x-Koordinate, sowie die y-Koordinate der Gesamtkraft $\vec{F}_{\text{ges}}$

[1] Der Impuls ist richtungsabhängig und somit eine vektorielle Größe.

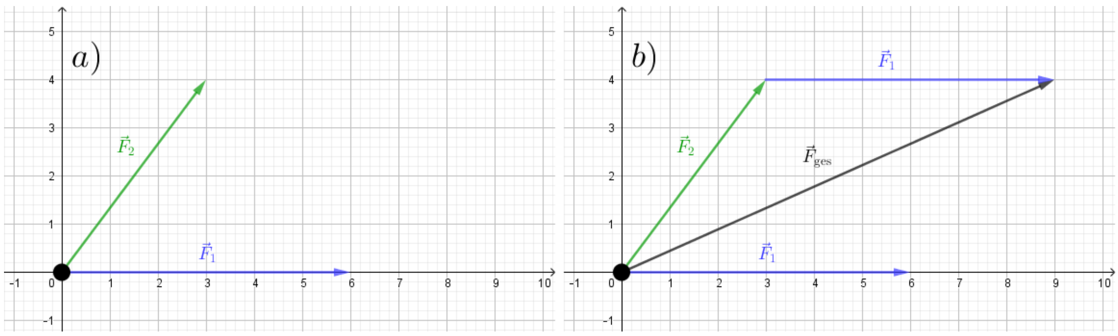


Abbildung 2: a) Zwei Kräfte greifen an einen Körper an. b) Zwei Kräfte werden durch Aneinanderhängen addiert, dabei wird der Kraftvektor $\vec{F}_1$ verschoben.

aus den Koordinaten der beiden Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zusammensetzen. Wir wollen nun allgemein die Addition zweier Vektoren anschreiben.

Zwei Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ werden folgendermaßen addiert:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Die Subtraktion funktioniert analog:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Wir kennen nun die Addition und Subtraktion von Vektoren. Für die Multiplikation wollen wir uns erinnern, welche physikalischen Zusammenhänge mit Hilfe von Formeln beschrieben werden, die sowohl Vektoren als auch Multiplikationen enthalten. Die beiden nachstehenden sollten bereits aus der Schule bekannt sein, stehen jedoch nur exemplarisch für viele andere.

1. $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ (Impuls = Masse · Geschwindigkeit)
2. $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ (Arbeit = Kraft · Weg)

Man erkennt, dass es sich hier wohl um zwei verschiedene Arten der Multiplikation handeln muss. Im ersten Fall multiplizieren wir einen Vektor mit einer Zahl (einem

Skalar) und erhalten wiederrum einen Vektor. Im zweiten Fall hingegen multiplizieren wir zwei Vektoren und erhalten einen Skalar.
Beginnen wir unsere Betrachtung mit dem ersten Fall: Je größer die Masse eines Körpers und je größer seine Geschwindigkeit, desto größer auch sein Impuls. Die Geschwindigkeit ist, ebenso wie der Impuls richtungsabhängig und beide Größen wirken in dieselbe Richtung, nämlich in Bewegungsrichtung des betrachteten Körpers. Die Masse hingegen ist von der Bewegungsrichtung unabhängig, sie darf somit auch mathematisch keine Richtung bevorzugen. Aus diesen Überlegungen heraus erscheint das folgende Rechengesetz durchaus sinnvoll.

Multipliziert man einen Vektor $\vec{v}$ mit einer reellen Zahl c, so erhält man einen Vektor $\vec{w}$. Es gilt:

$$\vec{w} = c \cdot \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x \\ c \cdot y \end{pmatrix} \tag{1}$$

Diese Art der Multiplikation wird skalare Multiplikation genannt.

Wir wollen uns nun auch ansehen, wie man die Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor graphisch verstehen kann. Aus Gleichung (1) sehen wir, dass jede Komponente des Vektors mit dem Skalar c multipliziert wird. Für die grafische Umsetzung betrachten wir den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir wollen diesen Vektor nun mit der Zahl $c = 3$ multiplizieren.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Sowohl die x-Koordinate als auch die y-Koordinate wurden verdreifacht. In Abbildung 3 ist der Vektor $\vec{v}$, sowie der Vektor $3 \cdot \vec{v}$ zu sehen. Man erkennt in der Graphik auch, dass man eine Verdreifachung auch durch $\vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$ erhalten könnte. Eine Eigenschaft, die bereits von der Multiplikation reeller Zahlen bekannt ist.
Kommen wir noch einmal zum Impuls zurück. Wir haben gesehen, dass die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar nur seinen Betrag, jedoch nicht seine Richtung oder Orientierung ändert. Das passt sehr gut zu unseren Anfangsüberlegungen, dass die Masse keine Richtungsänderung der Bewegung verursachen soll. Dieses Rechengesetz ist somit gut mit unserer Alltagsvorstellung verträglich.
Anmerkung 1: Bei der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar steht der Vektor üblicherweise auf der rechten Seite.

Anmerkung 2: Wir haben gesehen, dass es (zumindest) zwei Arten der Multiplikation

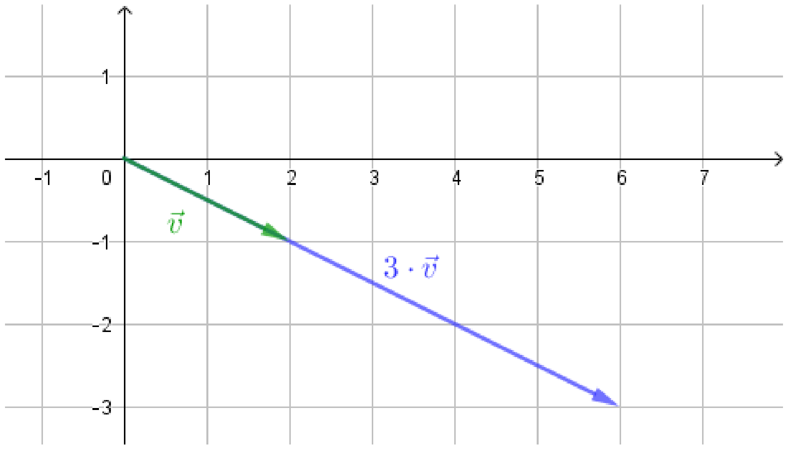


Abbildung 3: Hier ist zu sehen, dass ein Vektor, durch Multiplikation mit der Zahl 3 seine Länge verdreifacht. Die Richtung, sowie die Orientierung des Vektors bleiben unverändert.

von Vektoren gibt. Da wir die Division meist als Umkehrung der Multiplikation verstehen, tun wir uns schwer eine Division für Vektoren zu definieren. Will man trotzdem bei bekannter Masse vom Impuls eines Körpers auf dessen Geschwindigkeit schließen, kann man den Kehrwert der Masse mit dem Impuls multiplizieren:

$$\frac{1}{m} \cdot \vec{p} = \vec{v}$$

Als Division im eigentlichen Sinne sollte man dies allerdings nicht auffassen.

Kommen wir nun zum zweiten Fall der Multiplikation. Da dieser Fall für uns sehr wichtig und auch weitreichend ist, wollen wir ihm hier ein eigenes Kapitel widmen.

2 Das Standardskalarprodukt für zweidimensionale Vektoren

In diesem Kapitel wollen wir uns der Frage annehmen, wie man zwei Vektoren miteinander multiplizieren kann. Wir haben zuvor bereits das Beispiel der Arbeit angeführt. Auch in der Quantenmechanik wird das Skalarprodukt eine wichtige Rolle bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten spielen - dazu jedoch mehr in den Bausteinen „Komplexe Vektoren“ und „Hilberträume“.

Auch in diesem Fall gilt, je größer der zurückgelegte Weg und je größer die Kraft desto größer auch die verrichtete Arbeit. Wir müssen uns zuallererst überlegen, in welchen

Fällen wir überhaupt (physikalische) Arbeit verrichten und ob diese nur von der Stärke der Kraft und der Länge des Wegs abhängt. Aus dem Alltag und der Schulphysik wissen wir, dass dies nicht der Fall ist. Beispielsweise wird keine physikalische Arbeit verrichtet, wenn eine schwere Kiste innerhalb eines Stockwerks getragen wird. Trägt man sie allerdings gleich weit eine Rampe hoch, so wird Arbeit verrichtet. Wir erkennen, dass die Arbeit auch von der Richtung der Bewegung (und der Kraft) abhängt. Dazu sehen wir uns die beiden Fälle in Abbildung 4 an.

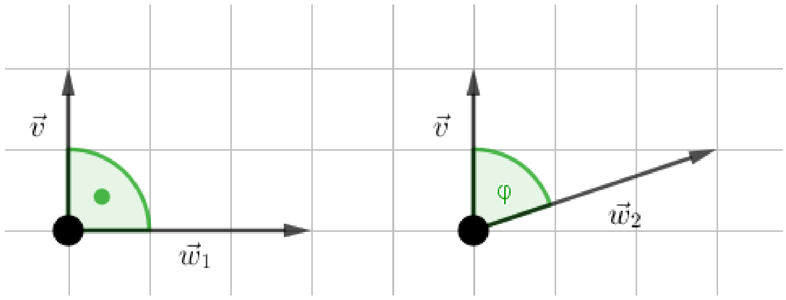


Abbildung 4: (links) Zwei Vektoren stehen im rechten Winkel zueinander. (rechts) Die beiden Vektoren schließen einen spitzen Winkel miteinander ein.

Der linke Fall in Abbildung 4 entspricht unserem Beispiel, wenn wir eine Kiste über eine gerade Fläche tragen. Den rechten Fall können wir mit unserer Überlegung vergleichen, in dem wir die Kiste eine Rampe hoch tragen. Je steiler eine solche Rampe ist, desto mehr Arbeit werden wir verrichten. Wichtig ist dabei, dass der zurückgelegte Weg immer gleich bleibt. Die meiste Arbeit werden wir daher genau dann verrichten, wenn dir die Kiste senkrecht nach oben heben. Diesen Überlegungen zufolge, würden wir sagen, dass die verrichtete Arbeit vom Winkel abhängt, den der Kraftvektor und der Wegvektor miteinander einschließen. Am größten ist sie, wenn der eingeschlossene Winkel $\varphi = 0$ beträgt und sie verschwindet, wenn er $\frac{\pi}{2}$ annimmt. Aus dem Baustein „Funktionen“ kennen wir eine Winkelfunktion, die uns genau dieses Verhalten liefert, die Kosinusfunktion.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kann mit Hilfe des eingeschlossenen Winkels φ berechnet werden.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)$$

Aus dieser Formel können wir auch den folgenden sehr wichtigen Zusammenhang ableiten, indem wir das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst bilden. Der Winkel zwischen einem Vektor mit sich selbst beträgt logischerweise $\varphi = 0$.

Man kann den Betrag eines Vektors mit Hilfe des Skalarprodukts berechnen.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \underbrace{(\cos 0)}_{=1} = |\vec{v}|^2$$

Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist gleich seinem Betragsquadrat.

Da es händisch oft sehr unpraktisch ist mit Winkelfunktionen zu arbeiten, gibt es für kartesische Koordinaten auch eine weitere Möglichkeit das Skalarprodukt zu berechnen.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$ kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y$$

Anmerkung 3: Auch hier ist es nicht möglich eine sinnvolle Division zu definieren.

3 Vektoren in drei oder mehr Dimensionen

Wir wollen nun eine Dimension höher gehen. Dabei wollen wir gleich mit einer guten Nachricht beginnen. Alles was wir in den letzten beiden Kapiteln besprochen haben funktioniert für drei (und mehr) Dimensionen genauso. Beispielsweise die Addition:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}$$

Es gibt noch eine dritte „Art“, wie man Vektoren miteinander „multiplizieren“ kann, das so genannte Kreuzprodukt. Wir kennen es bereits vom Drehmoment oder der Lorentzkraft. Es werden zwei Vektoren so miteinander verbunden, dass man einen Vektor erhält. In der Mathematik wird es meist dazu verwendet um im $\mathbb{R}^3$ einen Vektor zu finden, der auf zwei vorgegebene Vektoren normal steht.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{z}$ steht senkrecht sowohl auf $\vec{x}$, als auch auf $\vec{y}$.

Bis jetzt haben wir Vektoren immer als Spalte angeschrieben. Das müssen wir allerdings nicht so machen. Es würde an der Mathematik nichts ändern, wenn wir anstelle dieser Spaltenvektoren, Zeilenvektoren verwenden würden. Darauf werden wir später noch einmal zu sprechen kommen und dabei sehen, dass beide wichtig für uns sind.

4 Der Vektorraum - Auch Vektoren brauchen ein Zuhause

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit reellen Vektorräumen. Das bedeutet, dass die Skalare, die wir zur Beschreibung unseres Vektorraums benötigen reelle Zahlen sind. Wie uns der Name bereits sagt, brauchen wir auch Vektoren um einen Vektorraum zu beschreiben. Im Rahmen der linearen Algebra ist der Vektorraum weitaus wichtiger als die Vektoren selbst und die Vektoren werden lediglich als seine Elemente betrachtet. Im Laufe der nächsten Bausteine werden wir noch weitere dieser Vektorräume kennenlernen.

Der Einfachheit halber beginnen wir unsere Beschreibung mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ - der Raum der zweidimensionalen Vektoren. In den vorherigen Kapiteln haben wir bereits darüber gesprochen welche Erwartungen wir, von der Physik kommend, an Vektoren stellen:

1. Wir wollen Vektoren addieren können. Das haben wir gebraucht um beispielsweise einen Körper zu beschreiben auf den mehrere Kräfte wirken. In Aufgabe [Ü7] haben Sie sich womöglich keine Gedanken gemacht, in welcher Reihenfolge Sie die Vektoren addieren. Das ist auch vollkommen in Ordnung. Wir wollen schließlich keine Kraft einer anderen gegenüber bevorzugen.

2. Wir wollen auch, dass die Addition kommutativ ist. Es soll egal sein, ob wir

zuerst drei Schritte nach links gehen und danach zwei Schritte nach vorne oder umgekehrt.

3. In der Physik kann es durchaus vorkommen, dass eine Größe verschwindet. Beispielsweise wenn sich ein Körper nicht bewegt, wollen wir seine Geschwindigkeit mit $\vec{v} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ angeben. Ein solcher Vektor wird Nullvektor genannt. Wird er zu einem anderen Vektor addiert, so ändert er diesen nicht.

4. Wenn wir uns das dritte Newtonsche Axiom[2] genauer ansehen, wollen wir auch, dass es zu jedem Vektor einen gleich langen und gleich gerichteten Vektor gibt, der allerdings entgegengesetzt orientiert ist. Wir haben bereits gesehen, dass ein solcher Vektor durch die Vertauschung aller Vorzeichen entsteht ($-\vec{v}$). Die beiden Vektoren addiert sollen den Nullvektor ergeben.

Diese Dinge erscheinen womöglich sehr trivial, werden uns allerdings dabei helfen die Definition des Vektorraums zu verstehen. Auch für die Skalare, die im Vektorraum mit den Vektoren zusammenleben, wollen wir einige Regeln aufstellen.

5. Wir haben gesehen, dass die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar μ dazu führt, dass der Vektor um den Faktor μ verlängert wird. Wenn wir den erhaltenen Vektor auch mit einem zweiten Skalar λ multiplizieren, soll es keinen Unterschied machen in welcher Reihenfolge wir das tun. Es soll egal sein, ob wir die Geschwindigkeit beispielsweise zuerst verdoppeln und anschließend verdreifachen oder ob wir sie sofort versechsfachen.

6. Die Multiplikation mit der Zahl 1 lässt einen Vektor unverändert. Wir werden noch öfter darauf stoßen, dass die Zahl 1 eine gewisse Sonderstellung eingeräumt bekommt.

7. Man soll keinen Unterschied erkennen, ob man zwei Vektoren erst addiert und danach mit einer Zahl multipliziert oder umgekehrt.

8. Stellen wir uns vor ein Körper besteht aus zwei Einzelteilen m_1 und m_2, die man wie zwei Legosteine zusammenbauen kann und wieder von einander trennen. Für den Gesamtimpuls $\vec{p}$ soll es unerheblich sein, ob wir die Impulse der beiden Einzelteile betrachten und anschließend addieren, oder ob wir den Impuls des Gesamtsystems betrachten.

Wir möchten Vektoren addieren und mit Skalaren multiplizieren und zusätzlich, dass diese acht Bedingungen erfüllt sind und genau diese Wünsche machen einen Vektorraum aus.

[2] „Jede Kraft besitzt eine Gegenkraft“.

Die Menge $\mathbb{R}^2$ mit zwei Verknüpfungen (Addition $+$ und skalare Multiplikation $\cdot$) heißt Vektorraum, wenn die folgenden acht Axiome erfüllt sind:

1. Für alle Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$ gilt $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (Assoziativgesetz)
2. Für alle Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$ (Kommutativgesetz)
3. Es existiert ein Nullvektor $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$, für den gilt $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$. Das muss für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gelten.
4. Zu jedem $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein Element $-\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, sodass $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ gilt (inverses Element).
5. Für alle λ, $\mu \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{x}$.
6. Für alle $\vec{x}$ gilt $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (neutrales Element).
7. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$.
8. Für alle λ, $\mu \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$.

Auch diese Definition können wir beliebig auf höherdimensionale Räume ausweiten.

Eine wichtige Sache fehlt uns leider noch. Wir können in unserem Vektorraum noch keine Längen (und Winkel) messen. Dafür müssen wir noch ein Skalarprodukt[3] hinzufügen. Ein Vektorraum wie wir ihn oben beschrieben haben mit einem Skalarprodukt heißt „Euklidischer Vektorraum“.

Am Ende dieses Bausteins wollen wir noch zwei sehr wichtige Begriffe behandeln:

1. die Basis
2. die Linearkombination

Wir haben unsere Reise durch den Baustein Vektoren damit begonnen, dass wir einen Vektor aus seiner x-Komponente und seiner y-Komponente zusammengesetzt haben. Diese Komponente wollen wir nun durch so genannte „Einheitsvektoren“ beschreiben. Für die x-Komponente ist dies ein Vektor der Länge 1, der in Richtung der x-Achse zeigt:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

[3] Wir verwenden das Standardskalarprodukt wie in Kapitel 2 dieses Bausteins angegeben.

In unserem Beispiel mit dem wir begonnen haben, würde er aussagen:„Gehe einen Meter nach rechts.“Analog würde der Einheitsvektor in y-Richtung

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

besagen:„Gehe einen Meter nach vorne.“ Aus diesen beiden Vorschriften kann man eine Person nun in jede Richtung schicken. Links und zurück würden in diesem Fall durch negative Zahlen ausgedrückt werden. Dazu ein Beispiel:

Gehe 5 Meter nach links und 3 Meter nach vorne.
Diese Anweisung kann mit Hilfe von (2) und (3) schreiben als

$$\vec{v} = -5 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eine solche Zerlegung wird Linearkombination genannt. Jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich eindeutig als Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ schreiben.

Wir nennen die Menge

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$, da man jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ eindeutig als Linearkombination der Elemente aus B schreiben kann.

Um den zweidimensionalen Raum zu beschreiben brauchen wir nur zwei Basisvektoren. Für den dreidimensionalen Raum benötigen wir schon drei Vektoren (links/rechts, vor/zurück, hinauf/hinunter). Für vier Dimensionen brauchen wir vier Basisvektoren usw.

Die Menge B ist im Übrigen nicht die einzige Basis für den $\mathbb{R}^2$. Man kann sich beliebige zwei Vektoren, die nicht parallel sind, aussuchen und diese als Basis verwenden. Die von uns gewählte Basis B ist eine sogenannte „Orthonormalbasis“. Das Wort „Orthonormalbasis“ setzt sich aus drei Begriffen zusammen:

- Orthogonal: Das bedeutet, dass die Vektoren der Menge B, die Basisvektoren, alle aufeinander normal stehen.
- Normiert: Alle Basisvektoren sind normiert, sie haben die Länge 1.
- Basis

Übungsaufgaben

Ü1 Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = -\vec{a}$.

(a) Berechnen Sie die Beträge der beiden Vektoren und addieren Sie diese Beträge miteinander.
(b) Addieren Sie die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Berechnen Sie den Betrag des resultierenden Vektors.
(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von (a) und (b) miteinander.

Ü2 (Dreiecksungleichung) Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie $|\vec{v}| + |\vec{w}|$.
(b) Berechnen Sie $|\vec{v} + \vec{w}|$.
(c) Welches der beiden Ergebnisse ist größer? Versuchen Sie die Aufgaben (a) und (b) graphisch zu veranschaulichen.

Ü3 Für die Hubarbeit haben Sie in der Schule die Formel $W = m \cdot g \cdot h$ gelernt. Warum kann man hier auch ohne Berücksichtigung der Vektorrechnung (insbesondere des Skalarprodukts) auf das richtige Ergebnis kommen?

Ü4 Überprüfen Sie, ob das Skalarprodukt für zweidimensionale Vektoren kommutativ ist. Beginnen Sie dabei anhand eines Beispiels und versuchen Sie Ihre Vermutung anschließend allgemein zu zeigen.

Ü5 Überprüfen Sie, ob das Kreuzprodukt kommutativ ist. Beginnen Sie dabei anhand eines Beispiels und versuchen Sie Ihre Vermutung anschließend allgemein zu zeigen.

Ü6 Addieren Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowohl graphisch als auch rechnerisch miteinander.