Matrizen

18. März 2019

Matrizen werden in der Mathematik und der Physik oft dazu verwendet Abbildung, wie beispielsweise Drehungen oder Spiegelungen zu beschreiben. In der Quantenmechanik werden Sie Matrizen benötigen um Operatoren darstellen zu können.

Einstiegsbeispiele

E1 Addieren Sie die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ miteinander.

E2 Überprüfen Sie anhand der Matrizen aus Aufgabe E1 ob die Matrixmultiplikation im Allgemeinen kommutativ ist.

E3 Spiegeln Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ um die x-Achse.

E4 Drehen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn.

1 Abbildungen im $\mathbb{R}^2$

Zum Einstieg, wollen wir mit einem Beispiel beginnen um zu sehen, wie die mathematische Beschreibung einer Abbildung funktioniert. Dazu beginnen wir mit unserer Standardbasis im $\mathbb{R}^2$

$$B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir wollen die beiden Vektoren dieser Basis nun um einen Winkel α gegen den Uhrzeigersinn drehen (man könnte auch sagen wir drehen die gesamte Basis). Zur Veranschaulichung dient Abbildung 1.

Wir sehen, dass unsere Basis aus insgesamt vier reellen Zahlen besteht (zwei je Vektor). Klarerweise brauchen wir auch für die Beschreibung der beiden neuen Vektoren vier Zahlen. Wir wollen uns nun die Koordinaten der neuen Vektoren überlegen. Be-

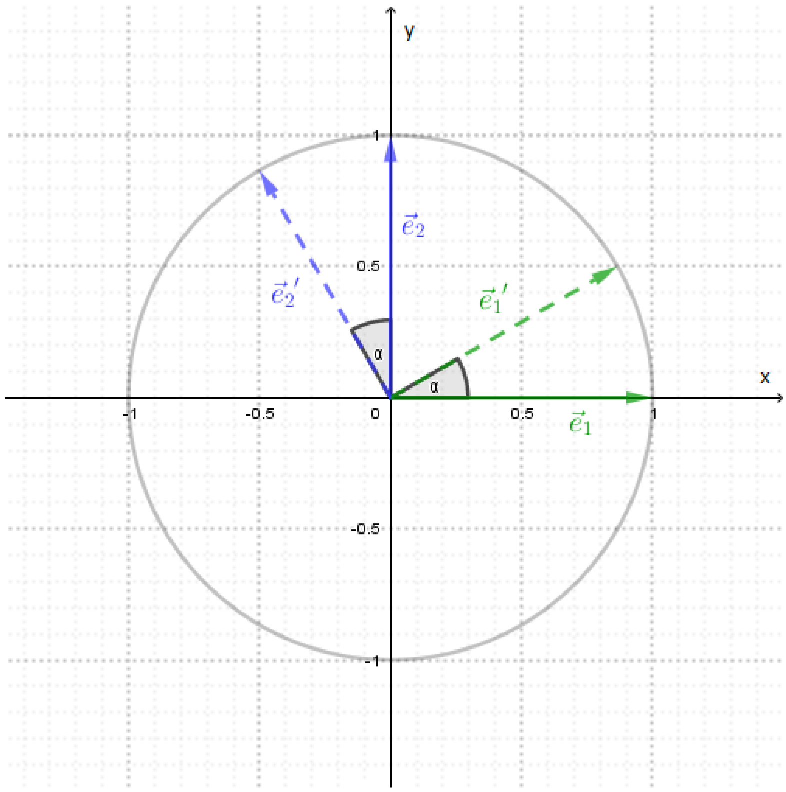

Abbildung 1: In dieser Abbildung sind die beiden Basisvektoren (durchgezogen) und die um α gedrehten Basisvektoren (strichliert) gezeichnet.

ginnen wir mit dem um α gedrehten Vektors $\vec{e_1}$ - nennen wir ihn $\vec{e_1}'$. Aus Kenntnis des

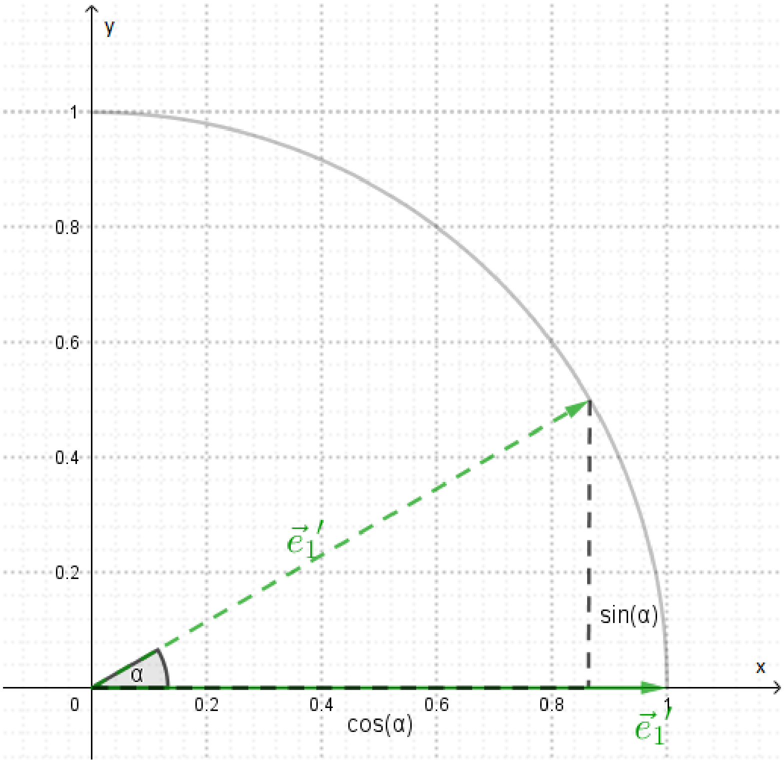

Abbildung 2: Die Koordinaten des um α gedrehten Basisvektors $\vec{e}_1$ können aus der Kenntnis des Einheitskreises gewonnen werden.

Einheitskreises und Abbildung 2 sehen wir, dass sich nachstehender Vektor ergibt:

$$\vec{e_1}' = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Um die Koordinaten des Vektors $\vec{e_2}'$ zu bestimmen ist etwas mehr Arbeit nötig, da der Winkel α mit der senkrechten Achse eingeschlossen wird und somit nicht direkt aus dem Einheitskreis folgt.

Betrachtet man Abbildung 1 sieht man, dass die beiden Vektoren $\vec{e_1}'$ und $\vec{e_2}'$ aufeinander normal stehen[1]. Aus der Schule wissen wir, wie man im $\mathbb{R}^2$ einen Normalvektor bilden kann[2]. Die Vorschrift lautet:„Vertausche die beiden Koordinaten und ändere ein Vorzeichen.“ Wir brauchen uns daher nur noch zu überlegen, welches Vorzeichen wir ändern müssen um das gewünschte Ergebnis zu erhalten. Die y-Koordinate beider Vektoren liegt im positiven Bereich des Koordinatensystems. Daher müssen sie auch beide ein positives Vorzeichen besitzen. Die x-Koordinate des Vektors $\vec{e_2}'$ ist allerdings negativ. Wir bekommen somit folgendes Ergebnis für den Vektor $\vec{e_2}'$:

$$\vec{e_2}' = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Diese vier Zahlen, die wir benötigen um unsere neuen Vektoren zu beschreiben wollen wir nun in einem bestimmten Schema aufschreiben, dass wir **Matrix** nennen. Diese Matrix soll vom Format 2×2 sein. Das bedeutet, dass sie zwei Zeilen und zwei Spalten haben soll.

$$R = \begin{pmatrix} \color{red}\bigstar & \color{blue}\bigstar \\ \color{green}\bigstar & \color{purple}\bigstar \end{pmatrix}$$

Jeder dieser Sterne steht nun für eine Zahl. Wir werden dabei die folgende Konvention befolgen. Später werden wir sehen, dass diese Wahl sehr gut mit der Matrixmultiplikation verträglich ist.

Die erste Spalte der Matrix entspricht dem Vektor $\vec{e_1}'$ und die zweite Spalte dem Vektor $\vec{e_2}'$.

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1}$$

Mit Hilfe dieser Matrix können wir nun jede Drehung in der Ebene beschreiben. Das Einzige, das wir verwendet haben, war die Kenntnis darüber, wie wir unsere Basisvektoren abbilden. Auch andere Abbildungen können wir auf diese Weise beschreiben (Übungsaufgaben Ü1 und Ü2).

[1] Wir haben zwei Vektoren, die normal zueinander stehen um denselben Winkel gedreht.

[2] Zu einem zweidimensionalen Vektor gibt es lediglich zwei Normalvektoren. Im $\mathbb{R}^3$ gibt es zu einem Vektor unendlich viele Vektoren, die normal auf ihn stehen.

2 Auf das Format kommt es an

Wir haben gesehen, dass wir für eine Abbildung im $\mathbb{R}^2$ eine Matrix im Format 2×2 benötigen. Um beispielsweise eine Rotation in drei Dimensionen zu beschreiben benötigen wir eine Matrix vom Format 3×3. Man kann dies natürlich wieder auf beliebige Dimensionen ausweiten. Eine Matrix, die eine Abbildung beschreibt, die beispielsweise einer Drehung oder Spiegelung entspricht, ist stets quadratisch.
Es gibt allerdings auch nicht quadratische Matrizen. Will man eine Projektion vom dreidimensionalen in den zweidimensionalen Raum beschreiben, so benötigt man eine Matrix im Format 2×3. Sie hat zwei Zeilen und drei Spalten. Generell gilt für die Angabe des Formats $Z \times S$, wobei Z die Anzahl der Zeilen und S die Anzahl der Spalten angibt.
Auch Vektoren kann man wie eine Matrix anschreiben. Sie bestehen aus einer Spalte und n Zeilen - haben daher das Formal $n \times 1$. Einen solchen Vektor, wie wir ihn bis jetzt immer hatten, nennen wir daher **Spaltenvektor**.

3 Rechengesetze für Matrizen

In diesem Kapitel wollen wir uns ansehen, wie man mit Matrizen rechnen kann. Die wohl wichtigste Operation wird dabei die Multiplikation sein. Sie ist womöglich auch die schwierigste, jedoch werden wir bald verstehen, warum sie auf diese Weise Sinn ergibt.
Um etwas Gespür für die Matrixrechnung zu bekommen wollen wir mit der Addition und Subtraktion beginnen. Diese sind ganz analog zu den entsprechenden Operationen bei den Vektoren definiert. Man addiert jedes Element der ersten Matrix zum entsprechenden Element der zweiten Matrix. Als Beispiel dient hier wieder die Addition der 2×2 Matrizen.

Die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ werden wie folgt addiert:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Die Subtraktion funktioniert analog:

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$$

Die Schreibweise, die wir hier verwendet haben ist typisch für die Matrixrechnung. Matrizen werden mit Großbuchstaben bezeichnet und ihre Elemente mit entsprechenden Kleinbuchstaben. Die Indizies geben die Zeilen- und Spaltennummern an. Das Element a_{12} ist in der Matrix A das Element der ersten Zeile und zweiten Spalte.
Man darf Matrizen nur dann addieren/subtrahieren, wenn sie dasselbe Format aufweisen.

Kommen wir nun zur Multiplikation. Zu Beginn wollen wir eine 2×2-Matrix mit einem Spaltenvektor multiplizieren. Für die Matrixmultiplikation multipliziert man jeweils die Zeilen der Matrix mit der Spalte des Vektors.

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

Das Produkt, das wir durch diese Multiplikation erhalten, ist ein Spaltenvektor. Wir kommen damit einer Forderung, die wir gerne für Abbildungen hätten näher. Wir wollen nun unsere Matrix aus dem ersten Kapitel mit den beiden Basisvektoren multiplizieren und erhalten daraus

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Das sind jedoch genau unsere gedrehten Basisvektoren. Wir sehen daraus, dass die Wahl, wie wir die Rotationsmatrix aufgestellt haben gut zur Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation passt.
Wir wollen nun zwei Abbildungen hintereinander ausführen. Als Beispiel dient uns hier das folgende. Wir wollen unseren Basisvektor $\vec{e}_1$ zuerst um einen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $(= 30^\circ)$ gegen den Uhrzeigersinn drehen und anschließend um die x-Achse spiegeln. Für die Drehung verwenden wir die Rotationsmatrix (1) und aus Aufgabe (Ü1) wissen wir bereits, wie wir eine Spiegelung um die x-Achse beschreiben können. Wir lesen und schreiben unseren Vorgang von rechts nach links an.

$$\underbrace{S_x}_{\text{Spiegelung um die x-Achse}} \quad \underbrace{R_{30^\circ}}_{\text{Drehung um }30^\circ} \quad \vec{e}_1$$

Um den gedrehten und gespiegelten Vektor zu berechnen, müssen wir nun folgende Multiplikationen ausführen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Die erste Möglichkeit dies zu tun ist, wie wir es bereits zuvor gemacht haben, zuerst die Matrix R_{30° mit dem Vektor $\vec{e}_1$ zu multiplizieren und anschließend S_x mit dem gedrehten Vektor. Die zweite Möglichkeit wäre zuerst die beiden Matrizen zu multiplizieren. Das ist zwar etwas komplizierter, es wird sich jedoch lohnen sich damit zu befassen.

Die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ können auf die folgende Weise multipliziert werden.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Um beispielsweise das Element c_{12} zu erhalten, muss man die erste Zeile der linken Matrix (A) mit der zweiten Spalte der rechten Matrix (B) multiplizieren. Das bedeutet, dass man das Element a_{11} mit dem Element b_{12} multipliziert und anschließend $a_{12} \cdot b_{22}$ addiert. So kann man auch größere Matrizen addieren. Wichtig ist dabei, dass die Anzahl der Spalten der ersten Matrix („so viele Elemente stehen in den Zeilen“) mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmen. Ist dies nicht der Fall, so kann man die beiden Matrizen nicht multiplizieren. Allgemein gilt:

Zwei Matrizen A und B können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn ihr Format dies zulässt. Wenn die Matrix A das Format $z_A \times s_A$ und die Matrix B das Format $z_B \times s_b$ hat, so muss für die Multiplikation

$$A \cdot B = (z_A \times s_A)\,(z_B \times s_B)$$

immer gelten

$$s_A = z_B.$$

Das Format der resultierenden Matrix ist stets

$$(z_A \times s_B)$$

Kommen wir noch einmal zurück zu unserem Beispiel von vorhin. Wir wollen uns nun fragen, ob es einen Unterschied macht, wenn wir die Reihenfolge der beiden Matrizen und somit auch die Reihenfolge unserer Abbildungen vertauschen. Kommen wir also zum selben Ergebnis, wie in Gleichung (2), wenn wir den Basisvektor $\vec{e}_1$ zuerst um die x-Achse spiegeln und anschließend um $30°$ gegen den Uhrzeigersinn drehen.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Da der Vektor $\vec{e}_1$ in Richtung der x-Achse zeigt, verändert sich seine Richtung nicht, wenn man ihn um die x-Achse spiegelt. Er bleibt somit unverändert und wird nur im Uhrzeigersinn gedreht. Auch die Rechnung in (3) führt zu diesem Ergebnis (Ü5). Für die Multiplikation ist das eine bemerkenswerte Erkenntnis! Wir dürfen die Matrizen, die wir multiplizieren wollen, nicht vertauschen.

Die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ!

Wir wollen nun auch ein Beispiel für die Nicht-Kommutativität im Dreidimensionalen betrachten. Die mathematische Beschreibung wäre komplizierter und wird hier weggelassen. Wir betrachten einen handelsüblichen Spielwürfel. Wir wollen diesen Würfel umdrehen und kippen.

1. Fall: Zuerst umdrehen, dann kippen: Der Würfel liegt wie in Abbildung 3 auf dem Tisch und wird umgedreht. Dadurch wandert die Seite mit sechs Augen nach oben und jene mit drei Augen zeigt nach vorne. Als zweiten Schritt werden wir den Würfel nach rechts kippen. Dadurch liegt nun die Seite mit zwei Augen oben auf.

2. Fall: Zuerst kippen, dann umdrehen: Wir beginnen mit derselben Lage des Würfels wie zuvor (Abbildung 3). Nun kippen wir ihn zu Beginn nach rechts. Es liegt nun die Seite mit zwei Augen oben auf. Nach dem Umdrehen zeigt die Seite mit fünf Augen nach oben.

Wir sehen auch hier, dass es einen Unterschied macht, ob wir zuerst umdrehen und dann kippen oder umgekehrt. Es gibt auch Fälle, in denen es keinen Unterschied macht in welcher Reihenfolge man Abbildungen durchführt, jedoch darf man nicht von vornherein davon ausgehen, dass man die Matrizen in der Multiplikation vertauschen darf.

Auch für Matrizen ist keine Division im eigentlichen Sinne definiert. Wir wollen jedoch Abbildungen rückgängig machen können. Wenn wir einen Vektor um einen Winkel α gedreht habe möchten wir ihn auch zurückdrehen können. Zurückdrehen bedeutet, dass

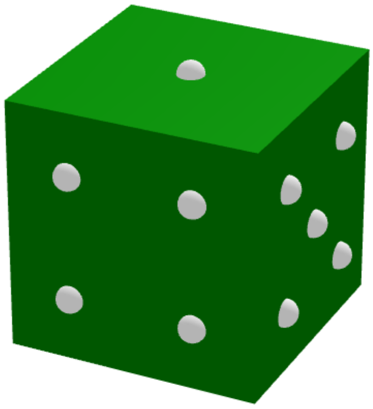

Abbildung 3: Ein handelsüblicher Spielwürfel wird verwendet um Rotationen im Dreidimensionalen zu veranschaulichen.

wir um den Winkel α im Uhrzeigersinn drehen - in mathematisch negative Richtung. Wir führen somit eine Drehung um $-\alpha$ durch.

$$R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

Da es sich bei der Kosinusfunktion um eine gerade Funktion[3] handelt gilt $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Die Sinusfunktion hingegen ist eine punktsymmetrische oder ungerade Funktion und daher gilt $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Wir können daher für die Rotation um den Winkel α im Uhrzeigersinn schreiben

$$R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Die Matrix $R_{-\alpha}$ beschreibt somit jene Abbildung, die die Drehung um α, also R_α rückgängig macht. Wir wollen, dass für jeden beliebigen Vektor $\vec{v}$ der folgende Ausdruck gilt:

$$R_{-\alpha}\, R_\alpha\, \vec{v} = \vec{v}$$

Das bedeutet: Wir gehen von einem Vektor $\vec{v}$ aus und drehen ihn um α gegen den Uhrzeigersinn. Anschließend drehen wir diesen neuen Vektor um α im Uhrzeigersinn. Dadurch kommen wir genau zu unserem Ausgangsvektor. Durch Multiplikation der beiden Matrizen $R_{-\alpha}$ und R_α sollten wir eine Matrix erhalten, die eine Abbildung beschreibt, die jeden Vektor unverändert lässt (Ü6).

$$R_{-\alpha}\, R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \tag{4}$$

[3]Das bedeutet, dass die symmetrisch zur y-Achse ist.

Die Matrix, wie wir sie in Gleichung (4) erhalten wird **Einheitsmatrix** $\mathbb{1}$ genannt. Sie entspricht bei der Zahlenmultiplikation der Zahl 1 und lässt jeden Vektor unverändert. Einheitsmatrizen sind stets quadratisch und auf ihrer Hauptdiagonalen (von oben links nach unten rechts) steht die Zahl 1, alle anderen Elemente sind 0.

Wir haben bereits besprochen, dass die Matrixmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist. Wollen wir eine Operation, wie beispielsweise eine Drehung rückgängig machen, sollte es egal sein, in welche Richtung wir zuerst drehen. Auch mathematisch ist das so. Eine Matrix, die das Umkehren einer Abbildung beschreibt, wird **inverse Matrix** oder nur **Inverse** genannt.

Eine Matrix A^{-1} heißt invers zur Matrix A, wenn

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}$$

gilt.

Wir haben nun alle wichtigen Begriffe und Gesetze erlernt, die für das Rechnen mit Matrizen notwendig sind. Da wir auch Vektoren in der Matrixrechnung berücksichtigen, wollen wir uns im nächsten Kapitel noch einmal mit ihnen auseinandersetzen.

4 Ein Blick zurück

Wir haben bereits gesehen, dass wir einen Spaltenvektor auch als $(n \times 1)$-Matrix schreiben können. Bei der Betrachtung des Skalarprodukts haben wir gesehen, dass wir zwei Vektoren so miteinander multiplizieren können, dass wir eine Zahl erhalten. Das ist nur dann möglich, wenn der zweite Vektor im Format $(1 \times n)$ ist und von links multipliziert wird.

$$(1 \times n)(n \times 1) = (1 \times 1)$$

Wir fassen eine (1×1)-Matrix als Zahl auf. Den Umkehrschluss sollte man jedoch nicht ziehen, denn es führt gelegentlich zu Problemen, wenn man eine Zahl als (1×1)-Matrix sieht. Ein $(1 \times n)$-Vektor besteht aus einer Zeile und n Spalten. Wir nennen einen solchen Vektor **Zeilenvektor**. Man erhält ihn aus einem Spaltenvektor, indem man diesen kippt. Dieser Vorgang wird **transponieren** genannt. Auch Matrizen können transponiert werden, indem man ihre Zeilen und Spalten vertauscht.

Eine Matrix A^T wird Transponierte der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ genannt, wenn

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

gilt

Das Skalarprodukt, wird somit durch Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor gebildet, wie das nachstehende Beispiel zeigt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 3 + 10 + 28 = 41$$

Wir haben bei dieser Multiplikation auch alle Regeln der Matrixmultiplikation berücksichtigt. Vor allem auch das Multiplizieren von Zeilen und Spalten. Was passiert, wenn wir die Vektoren aus dem vorherigen Beispiel vertauschen. Wir wollen daher die folgende Multiplikation durchführen.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir zuallererst das Format dieser Multiplikation:

$$(3 \times 1)(1 \times 3)$$

Nach den bereits bekannten Regeln ist diese Multiplikation möglich, da die aneinanderstoßenden Elemente gleich sind. Als Ergebnis erhalten wir eine (3×3)-Matrix.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 & 7 \cdot 2 & 7 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 5 & 10 & 20 \\ 7 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

Ein weiteres sehr deutliches Beispiel dafür, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

5 Wichtige Matrixeigenschaften zusammengefasst

Manche Matrizen haben bestimmte Eigenschaften, die andere nicht aufweisen. Wir wollen uns daher einige dieser Eigenschaften ansehen und Situationen finden in denen sie auftauchen oder eine wichtige Rolle spielen.

1. Sind alle Matrizen invertierbar?
2. Wann wird eine Matrix orthogonal genannt?

Für den ersten Punkt stellen wir uns die Frage, ob wir jede Abbildung umkehren können? Wenn wir einen Vektor um eine Achse spiegeln, können wir ihn zurückspiegeln, wenn wir ihn drehen, können wir ihn auch zurückdrehen. Was passiert jedoch, wenn wir ihn auf eine Achse projizieren? Wenn wir sozusagen seinen Schatten betrachten? Wir wollen einen Vektor $\vec{v}$ so abbilden, dass seine x-Koordinate erhalten bleibt und er auf der x-Achse liegt (siehe Abbildung 4). Wir wollen nun eine Matrix M finden, die

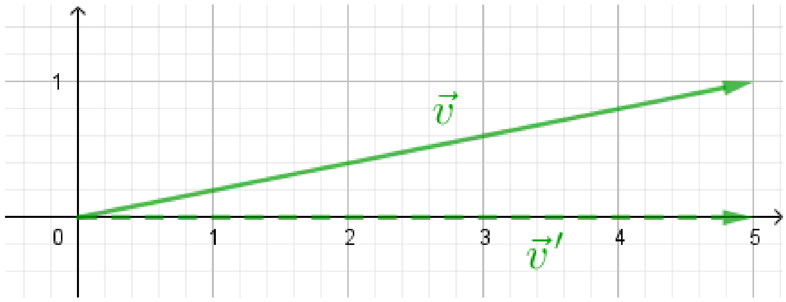

Abbildung 4: Der Vektor $\vec{v}$ wird auf die x-Achse projiziert.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Es müssen die nachstehenden Gleichungen für alle x und y erfüllt sein.

$$m_{11} \cdot x + m_{12} \cdot y = x$$
$$m_{21} \cdot x + m_{22} \cdot y = 0$$

Da das Ergebnis unabhängig von der y-Komponente des Vektors ist, müssen die Elemente der zweiten Spalte allesamt 0 sein. Auch m_{21} muss gleich 0 sein, da sonst die zweite Gleichung nicht erfüllt wäre. Das Element m_{11} hingegen muss 1 sein, damit die erste Gleichung erfüllt ist. Das gilt genau für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine solche Abbildung können wir nicht rückgängig machen. Das bedeutet, dass wir durch Kenntnis der Abbildung und des Vektors $\vec{v}\,'$ nicht auf $\vec{v}$ schließen können. Es gibt nämlich eine ganze Menge von Vektoren die durch Anwenden der Matrix M auf $\vec{v}\,'$ abgebildet werden. Wir haben durch die Abbildung sämtliche Informationen über

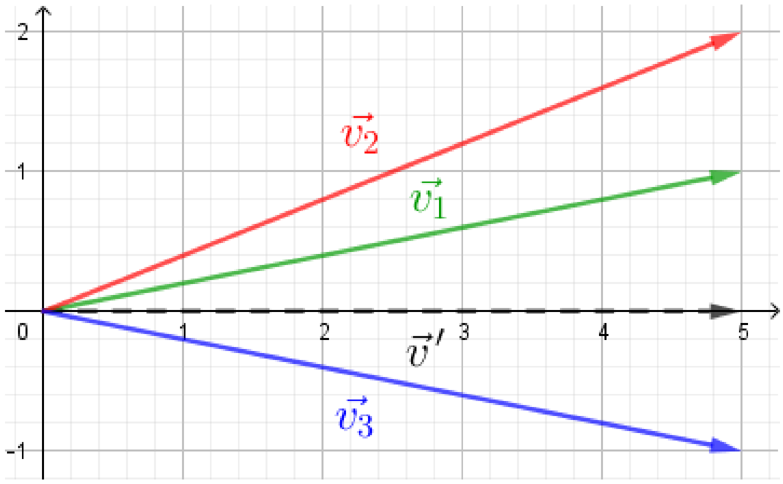

Abbildung 5: Jeder Vektor $\vec{v}$ wird durch M auf $\vec{v}'$ abgebildet. Man kann somit nicht von $\vec{v}'$ auf einen dieser Vektoren zurück schließen.

die y-Komponente des Vektors $\vec{v}$ verloren. Siehe dazu auch Abbildung 5. Somit gibt es keine inverse Matrix M^{-1}, die

$$M^{-1}\vec{v}\,' = \vec{v}$$

erfüllt. Wir sagen die Matrix M ist nicht invertierbar.
Es kann auch vorkommen, dass eine Matrix zu sich selbst invers ist. Ein Beispiel dafür wäre die Drehung um π (siehe Ü7). Eine solche Matrix nennt man **selbstinvers**. Genaueres dazu im Baustein „Determinanten“.

Unsere zweite Frage beschäftigt sich mit dem Begriff **orthogonal**. Der Begriff ist vielleicht schon aus der Schule bekannt. Man sagt, wenn zwei Vektoren orthogonal sind, stehen sie normal zueinander. Man muss den Begriff jedoch ein bisschen erweitern, wenn man ihn auf Abbildungen anwenden möchte.

Wir nennen eine Abbildung orthogonal, wenn sie das Skalarprodukt erhält.

Wir werden bald verstehen was diese Definition bedeutet. Der für uns wichtigste Fall sind Basisvektoren, die zueinander normal stehen und normiert sind. Wir haben zu Beginn dieses Bausteins das Beispiel der Drehung der Standardbasis, einer Orthonormalbasis, besprochen. Dieses Beispiel hat uns über den gesamten Baustein begleitet und wird auch hier als wichtiger Vertreter dienen.

Intuitiv war uns in diesem Fall klar, dass die Vektoren $\vec{e}_1{}'$ und $\vec{e}_2{}'$ im rechten Winkel aufeinander stehen, da auch die Ausgangsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ einen rechten Winkel einschließen.
Aus der Schule wissen wir bereits, dass zwei Vektoren normal aufeinander stehen, wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist. Der Zusammenhang zwischen Winkel und Skalarprodukt ist für uns somit nichts Neues.

Kommen wir nun zur Formulierung „Skalarprodukt erhalten“. Diese Aussage bedeutet, wenn wir zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ um denselben Winkel α drehen, so soll sich das Skalarprodukt der beiden Vektoren und somit ihr eingeschlossener Winkel φ nicht ändern.Durch das Anwenden der Drehung erhalten wir aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gedrehten Vektoren $\vec{a}\,'$ und $\vec{b}\,'$ und es gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,' \cdot \vec{b}\,'$$

In der Quantenmechanik befassen wir uns mit Wahrscheinlichkeiten, die ebenfalls durch das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet werden. Damit dies auch immer funktioniert, verwenden wir normierte Vektoren. Das stellt sicher, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren (betragsmäßig) immer zwischen 0 und 1 liegt. Diese Eigenschaft wollen wir durch das Anwenden von Abbildungen ebenfalls nicht aufs Spiel setzen. Aus diesem Grund sind uns Abbildungen, die das Skalarprodukt nicht verändern so wichtig. Eine orthogonale Abbildung stellt somit sicher, dass Skalarprodukte und somit auch Winkel und Längen, sowie Wahrscheinlichkeiten erhalten bleiben.

Eine reelle und quadratische Matrix A wird orthogonal genannt, wenn

$$A^T A = A A^T = \mathbb{1}$$

gilt. Aus dieser Bedingung kann man leicht ableiten, dass auch

$$A^T = A^{-1}$$

erfüllt ist.

Im Baustein „Komplexe Vektoren“ werden wir dieses Thema erneut für komplexe Vektoren aufgreifen.

Übungsaufgaben

Ü1 Berechnen Sie die Vektoren $\vec{e_1}'$ und $\vec{e_2}'$ aus Kapitel 1 für die Werte $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = \pi$. Zeichen Sie diese am Einheitskreis ein.

Ü2 Stellen Sie Matrizen auf, welche die folgenden Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ beschreiben.

a. Drehung im Uhrzeigersinn

b. Spiegelung um die x-Achse

c. Spiegelung um die y-Achse

Ü3 Berechnen Sie $A+B$ sowie $A-B$ und $B-A$ der beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ü4 Rechnen Sie die Gleichungen (2) und (3) nach.

Ü5 Zeichnen Sie die Abbildungen, die durch die Gleichungen (2) und (3) gegeben sind am Einheitskreis ein.

Ü6 Rechnen Sie Gleichung (4) nach.

Ü7 Zeigen Sie, dass die Matrix, die eine Drehung um π beschreibt selbstinvers ist.

Ü8 Zeigen Sie, dass es sich bei einer Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$ um eine orthogonale Matrix handelt.