Komplexe Zahlen

18. März 2019

Wenn wir die Welt um uns betrachten macht es im ersten Moment womöglich wenig Sinn die reellen Zahlen zu erweitern. Alle Messgrößen sind reellwertig, oft sogar nur positiv.
Wir werden allerdings bereits in der diskreten Quantenmechanik sehen, dass die komplexen Zahlen sehr weit gefächerte Anwendungen haben. Beispielsweise um zusätzlich zu linear polarisiertem Licht auch die zirkuläre Polarisation von Licht beschreiben zu können.

Einstiegsbeispiele

$$\left\langle i \right|$$

E1 Gegeben seien die komplexen Zahlen $a = 3 + 4i$ und $b = 1 - 7i$. Berechnen Sie:

a. $a + b$

b. $a - b$

c. $a \cdot b$

d. $\frac{a}{b}$

E2 Geben Sie die Zahl $z = 3 + 4i$ mit Hilfe der Eulerformel an.

E3 Bestimmen Sie die komplex Konjugiere, sowie den Betrag der Zahl $z = 3 + 4i$.

E4 Wie sieht die komplexe Zahl $z = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$ in algebraischer Form aus?

1 Von der quadratischen Gleichung zu den komplexen Zahlen

Bereits in der Schule lernt man das Lösen quadratischer Gleichungen und wie dieses mit den Nullstellen einer quadratischen Funktion zusammenhängen.
Wir betrachten dafür die Funktion $f(x) = x^2 + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Konkret wollen wir uns ansehen, wo die Nullstellen dieser Funktion liegen. Dafür werden wir exemplarisch einen Blick auf die Funktionsgleichungen für $c = -1$, $c = 0$ und $c = 1$ werfen. In Abbildung 1 sind die zugehörigen Funktionsgraphen zu sehen.

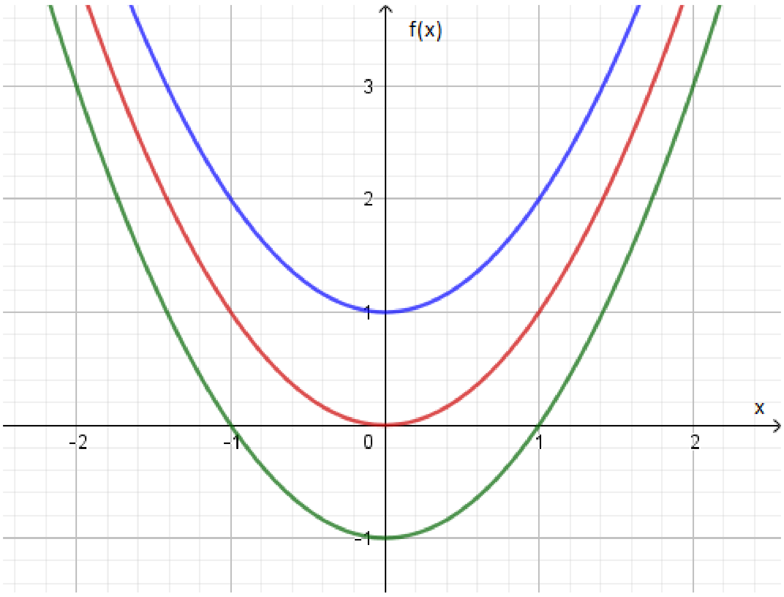

Abbildung 1: Hier sind die Funktionsgraphen der Funktionen $f(x) = x^2 + c$ für $c = -1$ (grün), $c = 0$ (rot) und $c = 1$ (blau) zu sehen.

Man erkennt deutlich, dass man die Anzahl der Nullstellen an der x-Achse in drei Fälle unterteilen kann. Nämlich

- **Zwei Nullstellen:** Ist $c < 0$, so liegt der Funktionsgraph auf jeden Fall zum Teil unterhalb der horizontalen Achse. Er schneidet diese zwei Mal.
- **Eine Nullstelle:** Ist $c = 0$, so liegt der Scheitelpunkt genau auf der horizontalen Achse. Der Funktionsgraph hat somit genau einen Schnittpunkt mit dieser Achse.
- **Keine Nullstelle:** Ist $c > 0$, so liegt der gesamte Funktionsgraph oberhalb der horizontalen Achse. Er schneidet sie nie und hat somit keine Nullstellen.

Im nächsten Schritt wollen wir uns ansehen, wie man diese Nullstellen rechnerisch bestimmen kann. Wir bleiben bei unserem Beispiel von oben und beginnen mit dem Fall $c = -1$. Um die Nullstelle zu berechnen setzen wir die Funktion gleich Null:

$$x^2 - 1 = 0$$

Durch Umformen dieser Gleichung erhält man $x = \pm 1$.
Dieses Ergebnis stimmt mit den Nullstellen, die man in Abbildung 1 ablesen kann überein.
Nun wollen wir den zweiten Fall betrachten, nämlich $c = 0$. Um die Nullstelle zu berechnen müssen wir die Funktion auch hier Null setzen und erhalten:

$$x^2 = 0$$

Wir wissen, dass nur $x = 0$ diese Gleichung erfüllt. Auch dies stimmt mit den abgelesenen Nullstellen aus Abbildung 1 überein.
Jetzt fehlt noch der letzte Fall und dieser ist mit Abstand der interessanteste. Versuchen wir die Nullstelle unserer Funktion für $c = 1$ zu berechnen.

$$x^2 + 1 = 0$$

Als erstes formen wir diese Gleichung folgendermaßen um:

$$x^2 = -1$$

Wir wollen uns die Frage stellen, ob es eine Zahl gibt, deren Quadrat -1 ergibt. Mit anderen Worten gesagt, wollen wir die Wurzel der negativen Zahl -1 ziehen. Jedoch kennen wir aus dem Bereich der reellen Zahlen keine solche Zahl, die das erfüllt. Auch aus Abbildung 1 ist keine Nullstelle ersichtlich. Mathematisch gesehen spricht allerdings nichts dagegen eine solche Zahl zu definieren und genau das wollen wir nun auch tun[1].

> Wir definieren die imaginäre Einheit i, sodass gilt:
>
> $$i^2 = -1$$
>
> $\langle i |$

Die komplexen Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$ sind somit $x = \pm i$. Es ist leicht zu sehen, dass auch $(-i)^2 = -1$ ergibt. Zuvor wollen wir uns ganz allgemein ansehen, wie man mit diesen „neuen" Zahlen rechnen kann.

[1] Man kann einige Argumente finden, warum man beispielsweise nicht durch 0 dividieren darf. Ein solches Argument findet man allerdings für die Wurzeln negativer Zahlen nicht. Daher kann man versuchen dieses Problem zu lösen.

2 Rechenregeln für komplexe Zahlen

Bevor wir beginnen mit komplexen Zahlen zu rechnen, sehen wir uns an, wie diese ganz allgemein aussehen können. Dazu werden wir nun zwei weitere quadratische Gleichungen lösen.

1. $x^2 + 4 = 0$
2. $x^2 - 2x + 5 = 0$

Wir beginnen mit der ersten Gleichung. Um diese Gleichung zu lösen, formen wir sie zuerst einmal um:

$$x^2 = -4$$

Wir suchen eine Zahl deren Quadrat -4 ergibt. Dabei hilft es uns, wenn wir die Zahl -4 als Multiplikation $4 \cdot (-1)$ schreiben. Durch partielles Wurzelziehen[2] erhält man $\pm 2 \cdot i$. Wir sehen somit, dass man die imaginäre Einheit mit einer reellen Zahl multiplizieren kann.
Widmen wir uns nun der zweiten Gleichung. Um diese zu lösen, hilft es uns in die Lösungsformel der quadratischen Gleichung[3] einzusetzen

$$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - 5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

Aus diesem Ergebnis sehen wir, dass es auch sein kann, dass im Allgemeinen eine komplexe Zahl auch einen reellen Teil haben kann.

> Eine komplexe Zahl z besteht aus einem Realteil a und einem Imaginärteil b. Dabei gilt $a, b \in \mathbb{R}$
>
> $$z = a + i\, b$$

Wir haben gesehen, dass wir eine komplexe Zahl mit Hilfe zweier reeller Zahlen beschreiben können. Man kann somit auch sagen, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ dem Raum der zweidimensionalen Vektoren $\mathbb{R}^2$ entsprechen. Dazu später mehr.
Die Rechengesetze für komplexe Zahlen sind denkbar einfach definiert. Beginnen wir

---

[2] $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

[3] Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann durch die folgende Lösungsformel gelöst werden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

mit der Addition und Subtraktion. Dabei gilt, dass man die Realteile addiert/subtrahiert, sowie die Imaginärteile:

> Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen:
>
> $$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$
> $$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Für die Multiplikation verwenden wir dieselben Rechenregeln, die auch für das Ausmultiplizieren von Klammern gelten, müssen dabei allerdings berücksichtigen, dass $i^2 = -1$ gilt:

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$$

Nun fassen wir die Realteile, sowie die Imaginärteile zusammen und erhalten:

> Multiplikation zweier komplexer Zahlen:
>
> $$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Die Division fehlt noch.

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = ? \tag{1}$$

Dazu werden wir einen Trick verwenden. Wichtig ist, dass der Nenner im Endeffekt reell wird, er die imaginäre Einheit also nicht mehr enthält. Für diesen Trick werfen wir einen Blick auf die dritte Binomische Formel für reelle Zahlen x und y:

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2$$

Wir sehen, dass die gemischten Terme wegfallen. Durch Vergleich mit der Multiplikation sehen wir, dass diese gemischten Terme genau jene waren, die den Imaginärteil ergeben. Versuchen wir nun dieses Wissen auf die Multiplikation von komplexen Zahlen anzuwenden:

$$(a + b\,i) \cdot (a - b\,i) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \tag{2}$$

Da $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir aus der Multiplikation dieser beiden komplexen Zahlen ein reelles Ergebnis und genau diese Eigenschaft hilft uns für das Auflösen einer Division. Wir erweitern den Bruch aus (1) nun folgendermaßen:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \cdot (a_2 - b_2 i)}$$

Wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner ausmultipliziert erhält man:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a^2 + b^2} + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a^2 + b^2} i$$

Im Teil *Übungsbeispiele* werden die Rechenregeln anhand von Beispielen veranschaulicht.

Die Zahl $(a - b\,i)$, die wir zum Lösen der Division verwendet haben, wird uns noch öfter begegnen und daher wollen wir ihr einen Namen geben.

> Zu einer komplexen Zahl $z = a + b\,i$ nennen wir die Zahl $z^* = a - b\,i$ die komplex konjugierte Zahl.

3 Geometrische Interpretation und was man daraus lernen kann

Wir haben bereits gesehen, dass wir die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit den zweidimensionalen Vektoren des $\mathbb{R}^2$ vergleichen können. Eine komplexe Zahl kann als Punkt in der Ebene aufgefasst werden, wobei der Realteil die x-Koordinate und der Imaginärteil die y-Koordinate angibt (siehe Abbildung 2).

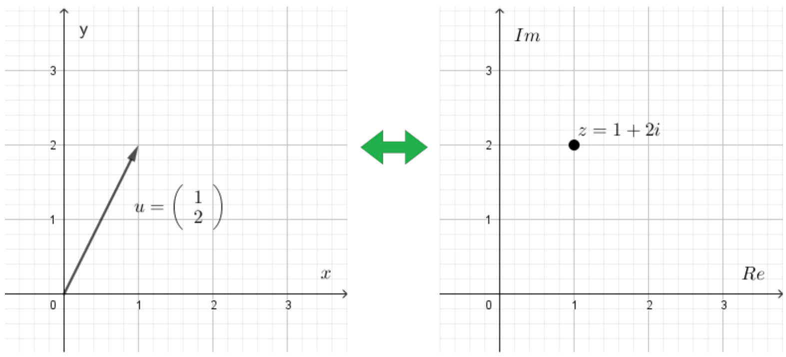

Abbildung 2: Hier sieht man wie eine Vektor (links) und eine komplexe Zahl (rechts) in der zweidimensionalen Ebene dargestellt werden können.

Wenn wir zurückdenken welche Eigenschaften wir den Vektoren zugeordnet haben, können wir uns überlegen, ob manche auch auf die komplexen Zahlen übertragen werden können. Wir wollen hier den Betrag anführen. Dieser wurde bei den Vektoren

über den Satz des Pythagoras eingeführt. Zur Erinnerung: Ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$ hat den Betrag $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dieser Betrag beschreibt genau die Länge des Vektors.
Da eine komplexe Zahl einem Punkt in der Ebene entspricht, werden wir den Betrag, wie auch bei den reellen Zahlen, als Abstand vom Ursprung definieren. Aus Abbildung 2 sehen wir, dass dieser Abstand genau der Länge des Vektors entspricht, der zu diesem Punkt zeigt.

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = a+b\,i$ kann folgendermaßen berechnet werden:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Durch Vergleich mit Gleichung (2) sehen wir, dass auch der folgende Zusammenhang gilt, der uns auch bei der Bra-Ket-Notation wieder begegnen wird:

Der Betrag einer komplexen Zahl kann auch mit Hilfe der komplex konjugierten berechnet werden.

$$z^* z = a^2 + b^2 = |z|^2$$

4 Eine andere Art der Darstellung, sowie ihre Vor- und Nachteile

Im Baustein „Koordinatensysteme und -transformationen“ haben wir die Polardarstellung von Vektoren bereits kennengelernt. Auch eine komplexe Zahl können wir in einer solchen Darstellung angeben. Wir werden sehen, dass wir in der Quantenmechanik oft komplexe Zahlen brauchen, deren Betrag $|z| = 1$ ist. Diese Eigenschaft können wir mithilfe der sogenannten Polardarstellung sehr leicht fordern.
Ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$ wird in Polarkoordinaten durch seinen Betrag und den Winkel, den er mit der positiven x-Achse einschließt beschrieben. Genau so werden wir auch die Polardarstellung der komplexen Zahl $z = a + b\,i$ angeben.

Eine komplexe Zahl $z = a + b\,i$ kann in Polardarstellung durch ihren Betrag $|z| \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in [0; 2\pi)$ angegeben werden, wobei $\varphi = arg(z)$ durch die sogenannte Argumentfunktion[a] gegeben ist.

[a]Dieser Winkel kann allerdings am leichtesten anhand von geometrischen Überlegungen am Einheitskreis ermittelt werden - vergleiche Abbildung 3.

Mit Hilfe der Polardarstellung einer komplexen Zahl kann man auch eine Verbindung zwischen den trigonometrischen Funktionen $\sin$ und $\cos$ und der komplexen Exponentialfunktion herstellen. Dieser Zusammenhang wird nach seinem Entdecker Leonhard Euler auch Eulerformel genannt und kann über eine Taylorreihenentwicklung für $e^{i\varphi}$ begründet werden.

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \tag{3}$$

Um zu verdeutlichen was dieser Zusammenhang über komplexe Zahlen aussagt, wollen wir uns die komplexen Zahlen ansehen, die auf dem Einheitskreis[4] liegen.

In Abbildung 3 ist eine dieser komplexen Zahlen dargestellt. Man erkennt, dass ihr Realteil dem Kosinus des Winkels φ entspricht und ihr Imaginärteil dem Sinus des Winkels φ. Dies entspricht genau der rechten Seite von Gleichung 3.
Mit Hilfe dieser Darstellung ist es nun sehr schnell möglich eine komplexe Zahl zu finden, deren Betrag 1 ist. Jede Zahl, die am Einheitskreis liegt erfüllt diese Bedingung. Aus Gleichung (3) erkennen wir, dass wir einen solche Zahl als $e^{i\varphi}$ schreiben können.

Man kann jede komplexe Zahl in nachstehender Form angeben:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Bei dieser Schreibweise ist allerdings Vorsicht geboten, denn sie ist nicht eindeutig. Die algebraische Form einer komplexen Zahl basiert auf kartesischen Koordinaten. Durch unsere Erfahrung wissen wir, dass es zu jedem Punkt nur genau eine Möglichkeit gibt ihn anzugeben, nämlich über seine $x-$ und seine $y-$Koordinate.

[4]Unter einem Einheitskreis versteht man einen Kreis mit Radius $r = 1$, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt.

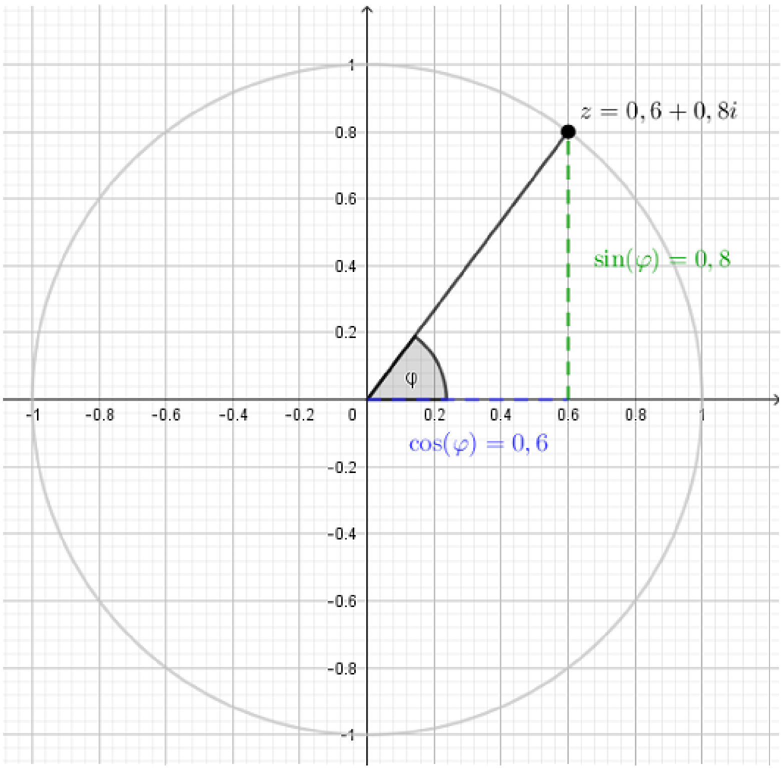

Abbildung 3: Hier wurde die komplexe Zahl $z = 0,6 + 0,8i$ auf dem Einheitskreis dargestellt.

Hingegen wird eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten durch ihren Betrag und den Winkel mit der positiven x-Achse beschrieben. Da für jeden Winkel $\varphi = \varphi + 2\pi n$ gilt, gilt auch für eine komplexe Zahl $z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot e^{i(\varphi + 2\pi n)}$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Wenn wir den Winkel φ nicht auf das Intervall $[0; 2\pi)$ einschränken, ist die Polardarstellung nicht eindeutig.

Übungsaufgaben

Ü1 a. Wie viele reelle Zahlen gibt es, deren Betrag 1 ist?

b. Wie viele komplexe Zahlen gibt es, deren Betrag 1 ist?

c. Was ist die geometrische Bedeutung des Betrags?

Ü2 Finden Sie zumindest eine Lösung für die Gleichung $e^x = -1$ und begründen Sie Ihre Überlegung. Gibt es weitere Lösungen und wie könnten diese aussehen?

Ü3 Wie sieht die komplexe Zahl $z = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$ in algebraischer Form aus? Ist die von Ihnen angegebene Lösung die einzig mögliche? Falls nein, welche gibt es noch?

Ü4 Schreiben Sie die komplexe Zahl $z = 4 + 3i$ in Polarkoordinaten an. Ist die von Ihnen angegebene Lösung die einzig mögliche? Falls nein, welche gibt es noch?

Ü5 Was passiert, wenn man eine komplexe Zahl zwei mal komplex konjugiert?