Komplexe Vektoren und Indexnotation

18. März 2019

Dieser Baustein besteht aus zwei Teilen.
Erster Teil (Kapitel 1-4): In der Quantenmechanik werden wir sehr viel mit komplexen Zahlen in Berührung kommen. Wir werden sie auch innerhalb von Vektoren verwenden. Daher werden wir auch dafür Vektorräume und einige weitere Begriffe benötigen, die wir zum Teil schon kennen, diese jedoch auch erweitern müssen. Dieser Baustein soll als Zwischenschritt in der Abstraktion dienen, um schließlich den „Hilbertraum“ zu beschreiben. Insbesondere erhebt der angegebene Text keinen Anspruch auf Vollständigkeit.
Zweiter Teil (Kapitel 5-8): Hier werden wir über die in der Physik häufig vorkommende Indexschreibweise sprechen und einige ihrer Eigenschaften untersuchen.

Michaela Miedler

Einstiegsbeispiele

$$\left\langle v_i^* \right|$$

E1 Führen Sie nachstehende Addition durch: $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} =$

E2 Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren aus Aufgabe E1.

E3 Berechnen Sie den Betrag des Vektors, der sich nach Ausführen der Addition in Aufgabe E1 ergibt.

E4 Geben Sie die Werte von δ_{11}, δ_{20} und δ_{02} an.

E5 Geben Sie die Werte von ϵ_{111}, ϵ_{123} und ϵ_{132} an.

Komplexe Vektoren

1 Komplexe Vektoren am Beispiel des $\mathbb{C}^2$

Wir wollen nun versuchen unsere bisherigen Erkenntnisse auf komplexe Zahlen zu erweitern und somit auch auf komplexe Vektoren. Da ein Vektor aus zumindest zwei Zahlen besteht und jede komplexe Zahl durch zwei reelle Zahlen geschrieben werden kann, ist der $\mathbb{C}^2$ mit dem $\mathbb{R}^4$ vergleichbar. Aus diesem Grund können wir auch zweidimensionale komplexe Vektoren nicht mehr zeichnen.
In den beiden letzten Bausteinen werden wir sehen, dass wir das Konzept des Vektorraums und seiner Elemente noch weiter abstrahieren können (und müssen). Wir wollen uns daher auch über eine allgemeinere Notation Gedanken machen:

1. Da wir solche „Vektoren", das können beispielsweise Funktionen sein, wie wir später sehen werden, nicht mehr als Pfeile deuten wollen, sollten wir uns daran gewöhnen, dass sie nicht immer ein „Pfeilchen" tragen. Insbesondere werden im nachstehenden nur rein reelle Vektoren durch Pfeile gekennzeichnet. Zur einfacheren Lesbarkeit werden komplexe Vektoren fett gedruckt. Vektoren sind nun eben die Elemente des Vektorraums, diesen haben wir im Baustein „Vektoren" bereits kennengelernt, aber dazu mehr im Baustein „Hilberträume und Skalarprodukte".

2. Wir werden sehen, dass wir das Skalarprodukt abändern müssen. Das nehmen wir zum Anlass, um eine andere Schreibweise kennenzulernen. Auch hier werden wir $\cdot$ nur noch für reelle Vektoren verwenden. Das Skalarprodukt zweier komplexer Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ schreiben wir durch

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Der Einfachheit halber werden wir uns hier wieder auf zwei Dimensionen beschränken. Sämtliche Rechengesetze können allerdings wie gehabt auf höhere Dimensionen erweitert werden. Bevor wir beginnen, wollen wir uns klar machen, was genau ein komplexer Vektor ist. Wir haben bei den reellen Vektoren bereits gesehen, dass wir sogenannte Skalare benötigen. Diese Skalare sind nun nicht mehr reelle, sondern komplexe Zahlen. Somit können die Eintragungen des Vektors auch komplexe Zahlen sein. Beachten Sie, dass es sich bei den reellen Zahlen nur um Spezialfälle der komplexen Zahlen handelt. Somit sind diese auch weiterhin als Skalare zulässig.

Die Rechenregeln für Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation bleiben wie gehabt. Auch unsere Standardbasis können wir beibehalten, für Linearkombinationen verwenden wir hier allerdings komplexe Zahlen, wie nachstehendes Beispiel zeigt.

$$\begin{pmatrix} 3+2\,i \\ i \end{pmatrix} = (3+2\,i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das einzige, wo wir aufpassen müssen ist das Skalarprodukt, wie das nächste Kapitel zeigt.

2 Das Problem mit dem Skalarprodukt

Wir haben bereits gesehen, dass wir Skalarprodukte für vieles benötigen. Wir kennen für reelle Vektoren bereits das Standardskalarprodukt für beispielsweise zweidimensionale Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Uns war dabei unter anderem eine Eigenschaft sehr wichtig. Wir haben das Skalarprodukt verwendet, um Längen zu messen. Zur Erinnerung, die Länge eines reellen Vektors $\vec{v}$ ist durch

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

gegeben. Daher wollen wir, dass $\vec{v} \cdot \vec{v}$ für alle Vektoren $\vec{v}$ eine positive Zahl[1] ist. Nur für den Nullvektor soll das Skalarprodukt mit sich selbst Null sein. Ob das Wort Länge nun auch für komplexe Vektoren Sinn macht, lassen wir einmal außen vor. Wir wollen diese Eigenschaft dennoch behalten. In der Mathematik nennen wir diese Eigenschaft „positiv definit“. Wir werden im Baustein „Hilberträume und Skalarprodukte“ sehen, dass ein Skalarprodukt immer drei Eigenschaften erfüllen muss, von denen eine eben positiv definit zu sein ist. Das Wort positiv ist wohl selbsterklärend. Das Wort definit bedeutet, dass das Skalarprodukt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ nur dann 0 ist, wenn $\mathbf{v} = 0$ gilt und umgekehrt. Nur der Nullvektor darf somit Länge 0 haben.

Um zu überprüfen, ob unser bereits bekanntes Skalarprodukt das erfüllt, wollen wir es mit zwei Beispielen versuchen[2].

1. Berechnen Sie das Skalarprodukt des Vektors $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ mit sich selbst.

2. Berechnen Sie das Skalarprodukt des Vektors $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ mit sich selbst.

[1] Um positiv zu sein muss eine Zahl vor allem auch reell sein. Komplexe Zahlen haben keine Totalordnung, sind daher weder positiv, noch negativ, noch größer oder kleiner.

[2] Um etwas in der Mathematik zu beweisen reichen Beispiele nicht aus, um etwas zu widerlegen genügt jedoch ein einziges Gegenbeispiel.

Unter Verwendung unseres bekannten Standardskalarprodukts erhalten wir

1. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot i = 1 - 1 = 0$
   Wir haben somit zumindest einen komplexen Vektor gefunden, der ungleich dem Nullvektor ist, jedoch im Skalarprodukt mit sich selbst 0 ergibt. Daher wäre seine „Länge“ ebenfalls 0. Im nächsten Beispiel werden wir sehen, dass es noch skurriler werden kann.

2. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \cdot 0 + i \cdot i = -1$
   Dieser komplexe Vektor liefert mit sich selbst multipliziert sogar eine negative Zahl. Würden wir die Länge dieses Vektors berechnen, wie wir es bei den reellen Vektoren gemacht haben (Wurzel ziehen), würde er die Länge i bekommen.

Wir haben somit gesehen, dass uns das Standardskalarprodukt der reellen Vektoren, dass sie bereits in der Schule kennengelernt haben, in Schwierigkeiten bringt, weshalb wir im nächsten Kapitel ein Skalarprodukt definieren wollen, das besser zu unseren Bedürfnissen passt. Später werden wir sehen, dass auch das noch nicht die ganze Wahrheit ist.

3 Skalarprodukte für komplexe Vektoren

Im Baustein „Komplexe Zahlen“ haben wir zwei Möglichkeiten kennengelernt den Betrag einer komplexen Zahl zu berechnen. Einerseits über die Komponenten und den Satz des Pythagoras, andererseits durch die Multiplikation mit der komplex konjugierten Zahl. Wir haben gesehen, dass aus z^*z immer eine positive, insbesondere auch reelle Zahl resultiert - das Quadrat des Betrags.
Genau das wünschen wir uns auch für das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst. Ein reelles und vor allem auch positives Ergebnis. Zwei unterschiedliche Vektoren müssen dies nicht erfüllen und tun es im Allgemeinen auch nicht! Da die Summe von positiven reellen Zahlen wieder positive reelle Zahlen sind, können wir das Skalarprodukt von zwei komplexen Vektoren, wie im nachstehenden Kasten angegeben, berechnen.

Das Skalarprodukt zweier komplexer Vektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ kann durch

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = x_1^* \cdot x_2 + y_1^* \cdot y_2$$

berechnet werden.

Im Falle reeller Vektoren geht dieses Skalarprodukt in das aus der Schule bekannte Standardskalarprodukt über (warum?). Ob man die Elemente des linken oder des rechten Vektors im Skalarprodukt komplex konjugiert ist eine Frage der Konvention. Wir wollen allerdings stets das linke Element im Skalarprodukt komplex konjugieren.

Wir haben bei reellen Vektoren intuitiv vorausgesetzt, dass das Skalarprodukt kommutativ ist. Das für alle Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

gilt. Wir wollen nun überprüfen, ob auch für komplexe Vektoren diese Bedingung gilt. Wir wollen damit beginnen diese Vermutung anhand eines Beispiels zu testen. Wir verwenden dazu die beiden Vektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = (-i) \cdot 1 + (-i) \cdot 1 = -2\,i$$

Wir haben den Vektor $\mathbf{v}_1$ komplex konjugiert, wodurch i zu $-i$ wurde. Vertauschen wir nun die beiden Vektoren so erhalten wir:

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = 1 \cdot i + 1 \cdot i = 2\,i$$

Wir erkennen, dass wir hier nicht dasselbe Ergebnis bekommen, sondern das komplex konjugierte. Diese Eigenschaft wird uns noch häufiger in anderen Varianten begegnen. Wir nennen diese Eigenschaft **hermitesch**[3](Ü3).

> Für das Skalarprodukt zweier komplexer Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ gilt
>
> $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$$

Neben positiv definit zu sein, also $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, ist hermitesch die zweite Bedingung, die wir an ein Skalarprodukt stellen wollen (warum?). Wir haben gesehen, dass wir diese durch obige Definition ohnehin bekommen. Die dritte Eigenschaft, die wir hier noch nicht behandelt haben, wollen wir im Baustein „Hilberträume und Skalarprodukte" kennenlernen. Im obenstehenden Beispiel haben Sie auch gesehen, dass zwei unterschiedliche Vektoren im Skalarprodukt ein im Allgemeinen komplexes Ergebnis liefern können - die positive Definitheit bezieht sich somit nur auf das Skalarprodukt zweier identischer Vektoren.

[3] Oft auch hermitisch.

4 Abbildungen im $\mathbb{C}^2$

Auch Abbildungen komplexer Vektoren können wir mit Hilfe von (komplexen) Matrizen beschreiben. Die Eintragungen der Matrix sollen nun eben komplexe Zahlen sein. Diese Matrizen verwenden wir in der Quantenmechanik zur Beschreibung von Operatoren. Wir werden daher wieder besondere Ansprüche an sie stellen.

Denken wir zuerst an die reellen Matrizen zurück. Unser Wunsch war es Abbildungen invertieren zu können. Außerdem wollten wir Abbildungen, die das Skalarprodukt erhalten. Beide Forderungen wollen wir auch hier beibehalten. Die erste der beiden, die Invertierbarkeit, können wir ohne Abänderungen übernehmen. Wenn also eine komplexe Matrix existiert, die mit der ursprünglichen multipliziert die Einheitsmatrix ergibt, so haben wir ein Inverses und die ursprüngliche Matrix ist invertierbar.

Die zweite Eigenschaft, also die Erhaltung des Skalarprodukts, können wir leider nicht komplett gleich belassen. Wir haben schließlich auch ein anderes Skalarprodukt. Wir werden die Orthogonalität allerdings in der gleichen Weise abändern, wie wir auch das Skalarprodukt verändert haben. Zur Erinnerung eine orthogonale Matrix A erfüllt $A^T A = AA^T = \mathbb{1}$ beziehungsweise ihr Inverses ist genau das Transponierte, $A^T = A^{-1}$.
Für komplexe Matrizen, die das Skalarprodukt erhalten verwenden wir den Begriff **unitär**.

> Wir nennen eine Abbildung unitär, wenn sie das komplexe Skalarprodukt erhält.

Da wir hier das komplexe Skalarprodukt verwenden, gilt für unitäre Matrizen:

> Eine komplexe und quadratische Matrix A wird unitär genannt, wenn
>
> $$\left(A^T\right)^* A = A\left(A^T\right)^* = \mathbb{1}$$
>
> gilt. Aus dieser Bedingung kann man leicht ableiten, dass auch
>
> $$\left(A^T\right)^* = A^{-1}$$
>
> erfüllt ist.

Transponieren ist uns bereits bekannt. Eine Matrix komplex konjugieren bedeutet, dass man jedes Element der Matrix komplex konjugiert. Da die Schreibweise mit doppeltem Exponenten auf Dauer etwas unpraktisch ist, führen wir eine neue Bezeichnung ein, das sogenannte „**Dagger**“(oder „Kreuz“):

$$A^\dagger = \left(A^T\right)^* = (A^*)^T$$

Das transponieren und komplex konjugieren einer komplexen Matrix nennt man (komplex) **adjungieren**.

Indexnotation

5 Nabla und Laplace - Wie man mit Dreiecken rechnet

Wir kommen nun zum zweiten Teil dieses Bausteins. Hier werden wir uns zuerst mit Ableitungsregeln[4] für Vektoren beschäftigen und in den späteren Kapiteln eine praktische Schreibweise für die Themen der Vektoranalysis[5] kennenlernen.

Im Zentrum dieses Kapitels steht der sogenannte **Nabla-Operator**, der in drei Dimensionen folgendermaßen definiert werden kann:

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Wir erkennen, dass es sich dabei um einen Vektor handelt, dessen Komponenten partielle Ableitungen[6] sind. Wir wissen bereits, dass wir Vektoren mit Zahlen multiplizieren können, Skalarprodukte berechnen und auch das Kreuzprodukt bilden können. Diese drei Operationen wollen wir nun mit dem Nabla-Operator durchführen.

1. **Gradient:** Wir wollen den Nabla-Operator nun mit einer skalaren Funktion multiplizieren. Ein Beispiel für eine skalare Funktion wäre die Temperatur in Abhängigkeit des Orts, also $T(x, y, z) \equiv T(\vec{x})$. Der Gradientenvektor gibt an in welche

[4] Für die Integration sind vor allem die Sätze von Stokes und Gauß von Bedeutung.

[5] Analysis, also hauptsächlich Differential- und Integralrechnung, in mehreren Variablen.

[6] Hängt eine Funktion von mehreren Variablen ab, so entscheidet die partielle Ableitung nach welcher dieser Variablen man ableitet. Alle anderen Variablen werden als Konstanten betrachtet.

Richtung wir gehen müssen, damit die Temperatur den größten Anstieg (pro Einheit) hat.

$$\operatorname{grad} T(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2. **Divergenz:** Wir wollen nun das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit einer vektoriellen Funktion berechnen. Bekannt ist Ihnen die Divergenz womöglich bereits aus der Maxwellgleichung div $\vec{B}(\vec{x}) = 0$. Die Divergenz beschreibt die Quellstärke und somit ist die Aussage der genannte Maxwellgleichung, dass das Magnetfeld quellfrei ist.

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\partial B_x(\vec{x})}{\partial x} + \frac{\partial B_y(\vec{x})}{\partial y} + \frac{\partial B_z(\vec{x})}{\partial z}$$

3. **Rotation:** Als letztes wollen wir noch das Kreuzprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld berechnen. Durch diese Operation können wir Wirbel in einem Vektorfeld beschreiben. Betrachten wir beispielsweise ein Kraftfeld, so wissen wir, dass es sich um eine konservative Kraft handelt, wenn die Rotation verschwindet. Die Rotation eines Kraftfelds kann durch

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

berechnet werden, wobei $F_i \equiv F_i(\vec{x})$ für $i \in \{x, y, z\}$ gilt.

Der **Laplace-Operator** entsteht, wenn man das Skalarprodukt zweier Nabla-Operatoren bildet:

$$\triangle := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

6 Indexnotation

Im letzten Kapitel haben wir uns bereits mit den Ableitungen in mehreren Dimensionen beschäftigt und gesehen, dass das Anschreiben der Rotation beispielsweise umständlich ist. Aus diesem Grund wollen wir eine kompaktere Schreibweise kennenlernen.

Dazu werden wir die Indexnotation[7] verwenden. Wie der Name bereits sagt, wollen wir anstelle der Tupel-Darstellung, Vektoren nur durch ihre durchnummerierten Komponenten angeben. Ein dreidimensionaler Vektor $\vec{v}$ wird dabei beispielsweise durch seine Komponenten v_i angegeben, wobei $i \in \{1, 2, 3\}$. Auch den Nabla-Operator aus dem letzten Kapitel kann man in dieser Notation schreiben, nämlich ∇_i oder $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Sie sehen bereits, dass wir den Vektorpfeil hier weglassen. Logisch, da die einzelnen Komponenten Zahlen sind.
Um die Schreibweise so allgemein wie möglich zu halten, werden wir die Komponenten mit Zahlen durchnummerieren (anstelle der Raumkomponenten x, y und z). Die y-Komponente des Impulses p_y, schreiben wir somit p_2.

Anmerkung 1: Wenn wir in einem System mehrere Impulse beschreiben, nummerieren wir diese ebenfalls durch. Der Unterschied liegt jedoch darin, dass die Impulse in diesem Fall Vektorpfeile tragen. Der Impuls $\vec{p_1}$ ist somit einer von mehreren Impulsen in einem System - eine vektorielle Größe. Hingegen ist p_1 die x-Komponente des Impulses $\vec{p}$.

Wir haben im Baustein „Matrizen" bereits gesehen, dass wir auch die Komponenten einer Matrix durchnummerieren. Der erste Index entspricht dabei der Zeile und der zweite Index der Spalte. Wir können die 2×3-Matrix A beispielsweise durch ihre Komponenten a_{ij} mit $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \{1, 2, 3\}$ angeben. Sie sehen bereits, dass man einen Vektor durch einen Index und eine Matrix durch zwei Indizes beschreiben kann. Man kann auch Objekte (Tensoren) mit noch mehr Indizes definieren. Wahrscheinlich haben Sie das Levi-Civita-Symbol ε_{ijk} bereits gesehen - dazu später mehr.

7 Einsteinsche Summenkonvention

Nun wollen wir beginnen mit dieser neuen Notation zu rechnen. Zuallererst sehen wir uns das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ an. Zur Erinnerung:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots$$

Man erkennt, dass wir jeweils die Komponenten mit gleichem Index multiplizieren und diese Paare anschließend addieren. Etwas kürzer können wir dies auf folgende Weise anschreiben:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

[7] Wir werden hier nur untenstehende Indizes verwenden. Möchte man beispielsweise mit der aus der Relativitätstheorie bekannte Minkowski-Metrik rechnen, müsste man zwischen oberen und unteren Indizes unterscheiden.

Dabei ist n die Dimension der beiden Vektoren[8] und i der so genannte Summationsindex. Dieser nimmt alle Werte zwischen 1 und n an. Die Einsteinsche Summenkonvention besagt nun, dass wir das Summationszeichen $\sum$ weglassen und anstelle der obigen Formel

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_i$$

schreiben. Wir wissen bereits, dass der Name eines Summationsindex willkürlich gewählt werden kann. Wir hätten anstelle von i genauso gut k oder jeden anderen Buchstaben schreiben können. Wir wollen sie „Dummy-Indizes“ nennen. Wir verwenden sie nur genau einmal innerhalb einer Rechnung und schmeißen sie anschließend weg, ähnlich einer kaputten „Dummy“-Puppe beim Test von (schadhaften) Fahrzeug-Airbags. Die Konvention besagt auch, dass wir keine drei gleichen Indizes in einen Term packen. Wir sollten uns daher folgendes merken:

> Über zwei gleiche Indizes wird summiert. Der Name dieser Indizes ist vollkommen irrelevant. $\langle v_i^* |$

Zusätzlich zu den Dummy-Indizes gibt es auch freie Indizes, also welche die in einem Term nur einmal vorkommen. Solche freien Indizes müssen bei einer Gleichung erhalten bleiben. Das bedeutet, wenn links des Gleichheitszeichen ein freier Index steht muss das auch für die rechte Seite gelten. Steht rechts ein Vektor muss auch links ein solcher stehen. Selbiges gilt auch für Zahlen und Matrizen. Um dies zu verdeutlichen wollen wir uns einige Beispiele aus der Physik ansehen. Im nächsten Kapitel werden wir auch sehen, wie sehr uns diese Schreibweise das Leben vereinfachen kann.

- **Arbeit:** Die Arbeit kann über das Skalarprodukt von Kraft und Weg berechnet werden:

  $$W = \vec{F} \cdot \vec{x} = F_i \, x_i$$

  Links gibt es keinen freien Index, da die Arbeit eine skalare Größe ist und somit keinen Index braucht. Auch rechts treten nur Dummy-Indizes auf.

- **Impuls:** Der Impuls kann über die skalare Multiplikation von Masse und Geschwindigkeit berechnet werden:

  $$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

  oder in Indexnotation:

  $$p_i = m v_i$$

  Hier kommt der Index links, sowie rechts einmal vor - auf beiden Seiten der Gleichung steht ein Vektor.

[8] Bei der Berechnung des Skalarprodukts muss die Dimension der beiden Vektoren übereinstimmen.

- **Kreuzprodukt:** Viele physikalische Größen beinhalten ein Kreuzprodukt. Beispiele dafür wären der Drehimpuls und das Drehmoment. Für doppelt angewandte Kreuzprodukte gilt die folgende Identität:

$$\vec{v} = \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

  Wir schreiben nun den ersten dieser beiden Terme in Indexnotation an:

$$v_i = \left(\vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c})\right)_i = b_i\,(a_k\,c_k) = b_i\,a_k\,c_k$$

  Auch hier erkennen wir, dass sowohl rechts als auch links ein Vektor steht.

8 Kronecker-Delta und Levi-Civita-Symbol

In den letzten Kapiteln haben wir uns bereits viel mit der Schreibweise des Skalarprodukts beschäftigt. Nun wollen wir uns auch überlegen, ob wir das Kreuzprodukt mit der neuen Schreibweise vereinfachen können. Wir werden sehen, dass für dieses eine einzige Zeile ausreicht.

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Beginnen wir damit die Struktur dieses erstmals sehr kompliziert wirkenden Objekts zu analysieren. Was fällt Ihnen dabei auf? Vergleichen Sie mit der nachstehenden Liste:

- Die erste Komponente des Vektors $\vec{z}$ setzt sich nur aus der zweiten und dritten der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zusammen usw.
- Jede Komponente des Vektors $\vec{z}$ setzt sich aus zwei Termen zusammen, die jeweils aus einer Komponente des Vektors $\vec{x}$ und einer des Vektors $\vec{y}$ bestehen.
- Jeder Index kommt in jeder Spalte nur ein einziges Mal vor. Zum Beispiel in der ersten Spalte x_2, x_3, x_1.

Bevor wir uns nun um eine ökonomischere Schreibweise bemühen, werden wir das Kronecker-Delta[9] kennenlernen. Im Wesentlichen unterscheidet es, ob zwei Objekte gleich sind oder eben nicht. Es ist definiert durch:

[9] Die Delta-Distribution kann als kontinuierliches Analogon zum Kronecker-Delta gesehen werden.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Kommen wir nun zurück zum Kreuzprodukt. Um diese Kombinationen zusammenzufassen, ist das Levi-Civita-Symbol ε_{ijk} hilfreich. Es ist folgendermaßen definiert:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{zyklische Permutation von 1,2,3} \\ -1 & \text{antizyklische Permutation von 1,2,3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zyklische Vertauschungen sind jene, bei denen man 1, 2, 3 durchzählen kann. Als Tipp um sich diese zu merken, schreiben Sie am besten diese Zahlen zwei mal hintereinander auf:

$$1\,2\,3\,1\,2\,3$$

Unterstreichen Sie nun in der oberen Liste die ersten drei Zahlen in rot, anschließend die zweite bis vierte Zahl in blau und zuletzt die dritte bis fünfte Zahl in grün. Sie erhalten die Kombinationen

$$\begin{array}{c} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \\ 3\,1\,2 \end{array}$$

Genau diese Kombinationen sind die zyklischen Vertauschungen (oder Permutationen). Die antizyklischen Vertauschungen sind alle übrigen Kombinationen in denen jede Ziffer genau einmal vorkommt. Die sonstigen Fälle sind jene in denen eine Ziffer zumindest doppelt vorkommt.

Mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols können wir dieses folgendermaßen anschreiben (Ü5):

$$z_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, y_k$$

Überlegen Sie, wie diese Schreibweise mit den drei oben genannten Beobachtungen zusammenpasst.

Für die Multiplikation des Kronecker-Deltas und des Levi-Civita-Symbols gilt (Ü7):

$$\delta_{ij}\, \varepsilon_{ijk} = 0$$

Eine weitere sehr praktische Tatsache sind die Symmetrien dieser beiden Symbole. Für das Kronecker-Delta gilt

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

Es ist symmetrisch bezüglich der Vertauschung zweier Indizes. Hingegen ist das Levi-Civita-Symbol total antisymmetrisch. Das bedeutet, dass es durch Vertauschung zweier Indizes ein negatives Vorzeichen erhält, wie das nachstehende Beispiel zeigt:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$$

Wie in der Physik üblich sind Symmetrien ein Grund zur Freude. Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, wie sehr uns diese Schreibweise das Leben vereinfacht. Wir wollen zeigen, dass

$$\text{div rot}\,\vec{A} = 0$$

für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{A}$ gilt. Dazu schreiben wir dies in die Indexnotation um:

$$\text{div rot}\,\vec{A} = \nabla_i\,\varepsilon_{ijk}\,\nabla_j\,A_k$$

Da für bestimmte Werte von i, j und k das Levi-Civita-Symbol lediglich eine Zahl ist, dürfen wir es nach vorne ziehen und erhalten:

$$\text{div rot}\vec{A} = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{antisym.}}\;\underbrace{\nabla_i\,\nabla_j}_{sym.}\,A_k = 0$$

Wir wissen bereits, dass das Levi-Civita-Symbol antisymmetrisch ist. Aufgrund des Satzes von Schwarz wissen wir, dass man partielle Ableitungen vertauschen darf, weshalb $\nabla_i\,\nabla_j$ symmetrisch ist. Mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention[10] können wir nun begründen, dass etwas symmetrisches mit etwas antisymmetrischen multipliziert, verschwindet. Wir haben dadurch gezeigt, was wir zeigen wollten. Falls Sie glauben diese Aussage ohne dieser Konvention schneller allgemein beweisen zu können, versuchen Sie es.

Anmerkung 2: Für das Kronecker-Delta mit zwei gleichen Indizes gilt:

$$\delta_{ii} = n$$

Dabei ist n die Dimension. Auch hier greift die Einsteinsche Summenkonvention. Als Beispiel dient der Fall $n = 3$:

$$\delta_{ii} = \underbrace{\delta_{11}}_{=1} + \underbrace{\delta_{22}}_{=1} + \underbrace{\delta_{33}}_{=1} = 3$$

Anmerkung 3: Für die Multiplikation zweier Levi-Civita-Symbole, die zumindest in einem Index übereinstimmen, gilt:

[10] Nach Summation des obigen Ausdrucks kürzen sich alle Terme weg.

- $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl}$
- $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$
- $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{kk}$

Übungsaufgaben

$$\left\langle v_i^* \right|$$

Ü1 Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren aus Kapitel 2 mit der korrekten Definition des Skalarprodukts.

Ü2 Berechnen Sie das Skalarprodukt des Vektors $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ü3 Zeigen Sie allgemein für Vektoren des $\mathbb{C}^2$, dass das Skalarprodukt hermitesch ist.

Ü4 Geben Sie den Gradienten, die Divergenz sowie den Laplace-Operator in zwei Dimensionen an.

Ü5 Rechen Sie nach, dass das Kreuzprodukt $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ durch $z_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, y_k$ berechnet werden kann.

Ü6 Rechnen Sie für drei selbst gewählte Werte nach, dass die Identität $\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl}$ gilt.

Ü7 Begründen Sie, warum $\delta_{ij}\, \varepsilon_{ijk} = 0$ gilt.

Ü8 Zeigen Sie für ein beliebiges (genügend oft differenzierbares) Skalarfeld $\phi(\vec{x})$, dass $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0$ gilt. Führen Sie diese Rechnung sowohl in Indexnotation als auch in Vektorschreibweise durch.