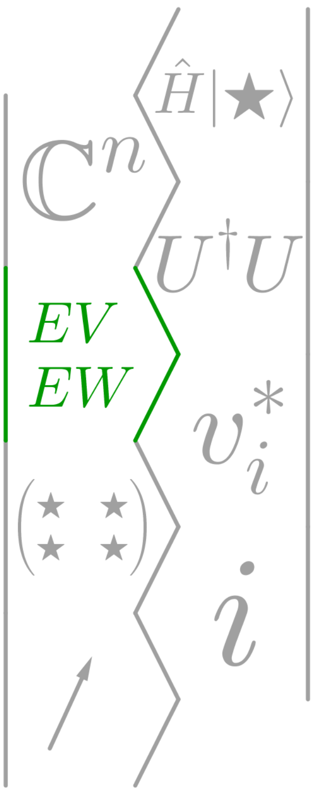
Eigenwerte und Eigenvektoren

18. März 2019



Eigenwerte werden wir in der Quantenmechanik als mögliche Messwerte einer Observablen (Messgröße) kennenlernen. In diesem Baustein wollen wir uns nicht nur damit befassen, wie wir Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen können, sondern auch was wir uns unter diesen vorstellen können.

*Dies ist ein Interaktiver Baustein, der mit den Geogebra-Files „Eigenwerte und Eigenvektoren finden“ sowie „Figuren abbilden“ verbunden ist. Zugang zu diesen Dateien erhalten Sie über:*LINK

Michaela Miedler

Einstiegsbeispiele

$$\left| \begin{matrix} EV \\ EW \end{matrix} \right\rangle$$

E1 Berechnen Sie die Eigenwerte, sowie die Eigenvektoren der Matrix $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

E2 Berechnen Sie die Eigenwerte, sowie die Eigenvektoren der Matrix $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

E3 Berechnen Sie die Eigenwerte, sowie die Eigenvektoren der Matrix $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1 Ziele

Wir haben uns in den letzten Bausteinen bereits viel mit Matrizen und Abbildungen beschäftigt, nun wollen wir uns überlegen, ob es Vektoren gibt, die unter einer Abbildung nur gestreckt oder gestaucht werden.
Zur Erinnerung: Ein Vektor wird durch die Multiplikation mit einem Skalar gestreckt oder gestaucht, je nach Betrag des Skalars.
Klarerweise wird diese Fragestellung von der Matrix, die die Abbildung beschreibt, selbst abhängen. Zu einer Matrix A nennen wir v einen Eigenvektor und λ einen Eigenwert, wenn

$$Av = \lambda v$$

erfüllt ist. Wenn wir die Matrix A auf den Vektor anwenden, soll dies dasselbe sein, als würden wir ihn mit der Zahl λ multiplizieren. Man kann diese Betrachtungen für die reellen Zahlen, als auch für die komplexen durchführen. Allerdings können wir die beiden Betrachtungen nicht mehr so einfach voneinander trennen, denn es gibt reelle Matrizen, die beispielsweise komplexe Eigenwerte aufweisen. Wir werden daher allgemein im Komplexen rechnen.
Anmerkung: Ist λ negativ, so wird die Orientierung des Vektors geändert, seine Richtung bleibt jedoch gleich. Daher ist v auch in diesem Fall ein Eigenvektor. Man könnte auch sagen, dass alle Vektoren Av, die zu dem Ausgangsvektor v parallel oder antiparallel sind Eigenvektoren sind.
Um ein etwas genaueres Bild davon zu bekommen, was wir uns unter dieser Überlegung vorstellen können, wollen wir mit einigen Beispielen für zweidimensionale reelle Abbildungen beginnen.

2 Reelle 2×2 - Matrizen

Im Geogebra-File „Eigenwerte und Eigenvektoren finden“ werden alle nachstehenden Matrizen auf den Vektor $\vec{v}$ angewandt. Der Vektor $\vec{v}$ kann durch verschieben des roten Punktes an seiner Spitze verändert werden. Die abgebildeten Vektoren sind durch die entsprechenden Indizes gekennzeichnet zu welcher Matrix sie gehören. Um die abgebildeten Vektoren anzuzeigen wählen Sie die entsprechende Schaltfläche aus. Versuchen Sie durch verändern des Vektors $\vec{v}$ seine Eigenwerte und seine Eigenvektoren zu finden. Sie können auch versuchen zu Beschreiben wie die einzelnen Matrizen auf den Vektor $\vec{v}$ wirken. Am Besten gehen Sie nach der Reihenfolge B - C - D - E - A vor. In den Kapiteln 2.1 bis 2.5 wird beschrieben, wie man die Eigenwerte sowie die Eigenvektoren finden kann. Versuchen Sie daher erst selbst welche aufzufinden, bevor Sie weiterlesen.

2.1 Matrix A - Streckung um den Faktor 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun diese Matrix auf einen allgemeinen Vektor der Form $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ anwenden.

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 2 \cdot y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass egal welchen Vektor wir für diese Betrachtung verwenden, er auf sein Doppeltes abgebildet wird. Unabhängig davon in welche Richtung v zeigt, ist v_A parallel und doppelt so lang. Wir wissen daher, dass die Matrix den Eigenwert 2 hat und jeder zweidimensionale (komplexe) Vektor Eigenvektor ist.

2.2 Matrix B - Spiegelung um die x-Achse

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich bei dieser Abbildung um eine Spiegelung um die x-Achse, die wir bereits im Baustein „Matrizen“ kennengelernt haben. Somit bleiben alle Längen erhalten. Das bedeutet auch, dass wir nur Eigenwerte mit Betrag 1 erwarten. Es wird schließlich kein Vektor verlängert oder verkürzt. Ein Vektor, der entlang der x-Achse liegt, sollte unter einer Spiegelung unverändert bleiben. Ein solcher Vektor hat die Form $v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$Bv = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektor v ist somit ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Im ersten Moment denkt man möglicherweise, das sei der einzige Eigenvektor. Doch was passiert mit einem Vektor der entlang der y-Achse zeigt. Wir wollen nun den Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ betrachten.

$$Bv = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Daher ist auch -1 ein Eigenwert und der Vektor w ein dazugehöriger Eigenvektor. Er bleibt durch Spiegelung um die x-Achse gleich lang, ändert jedoch seine Orientierung (Ü1).

2.3 Matrix C - Projektion auf die x-Achse

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch eine solche Matrix haben wir bereits kennengelernt. Jeder Vektor wird auf die x-Achse projiziert. Es bleibt lediglich der x-Anteil des Vektors übrig. Der Wert $\frac{1}{2}$ verkürzt diese x-Komponente noch auf die Hälfte des ursprünglichen Werts. Ein Vektor, der nur in x-Richtung zeigt, wird verkürzt, ändert seine Richtung aber nicht, daher haben wir einen Anwärter auf einen Eigenvektor gefunden. Dies wollen wir auch nachrechnen.

$$Cv = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor ist somit ein Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{2}$. Ein zweiter Vektor zeigt uns ebenfalls eine Besonderheit, nämlich der Vektor, der entlang der y-Achse gerichtet ist. Er besitzt überhaupt keinen Anteil in x-Richtung, aber sehen wir uns an, auf welchen „Vektor" er abgebildet wird.

$$Cv = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Ein Vektor der ausschließlich in diese Richtung zeigt, verschwindet unter Projektion auf die x-Achse. Er wird somit auf den Nullvektor abgebildet. Man sagt, dass er ebenfalls ein Eigenvektor ist. Ein Eigenvektor zum Eigenwert 0.

In den letzten drei Beispielen waren die kanonischen Basisvektoren stets Eigenvektoren. Wir werden sehen, dass dies nicht immer der Fall sein muss. Wir haben bis jetzt zwei Fälle kennengelernt

1. Jeder Vektor ist Eigenvektor.

2. Es gibt zwei Eigenvektoren.

Außerdem fällt auf, dass die Eigenwerte immer jene Zahlen waren, die genau auf der Hauptdiagonale liegen. Nun wollen wir uns zwei weitere Beispiele ansehen - wer weiß, vielleicht gibt es noch mehr Auffälligkeiten.

2.4 Matrix D - Drehung um 90° im Uhrzeigersinn

$$D = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektor v_D ist stets gleich lang wie der Vektor v. Das wundert uns nicht, da er nur um $\frac{\pi}{2}$ gedreht wird. Da keine Streckung oder Stauchung auftritt, erwarten wir einen

Eigenwert vom Betrag 1.
Wir haben nun jedoch das Problem, dass wir keinen Vektor $v \neq 0$ finden, der parallel zum abgebildeten Vektor v_D ist.
Da wir auch bemerkt haben, dass sich die Eigenwerte bis jetzt auf der Hauptdiagonale befunden haben, könnten wir auch 0 als möglichen Eigenwert erwarten. Das Problem hier ist jedoch, dass kein Vektor $v \neq 0$ auf den Nullvektor abgebildet wird.
Es scheint hier der Fall aufzutreten, dass wir keinen Eigenwert beziehungsweise Eigenvektor finden. Kann das sein?

2.5 Matrix E

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Beschreibung dieser Abbildung ist womöglich die schwierigste, daher ein Tipp, der Ihnen hoffentlich weiterhilft:

Blenden Sie den Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = 2x$ ein.

Der abgebildete Vektor v_E scheint an diese Funktion „angeheftet" zu sein. Das heißt somit auch, dass ein Vektor, der in diese Richtung zeigt ein Eigenvektor sein wird. Und das ist er auch. Aber wir bemerken auch, dass der Vektor gestreckt wird. Da wir diesen Wert nicht schön ablesen können, werden wir versuchen, ob wir ihn berechnen können.

$$Ev = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x \\ 3y \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Der Vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$ beschreibt alle Vektoren, deren y-Komponente das Doppelte der x-Komponente entspricht, also alle Vektoren, die auf der Geraden f liegen.
Wir haben somit den Eigenwert $\frac{3}{2}$ gefunden und den dazugehörigen Eigenvektor.
Um vielleicht noch einen zweiten Eigenwert zu finden, wollen wir einen allgemeinen Vektor abbilden.

$$Ev = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ x+y \end{pmatrix}$$

Wie gehabt stehen x und y-Koordinate im Verhältnis 1:2. Außerdem sieht man, dass man für $x = -y$ den Nullvektor erhält. Wir sehen somit, dass der Vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ für $x \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist.

2.6 Figuren abbilden

Im Geogebra-File „Figuren abbilden“ können Sie sich ansehen wie eine beliebige 2×2-Matrix auf einen Vektor $\vec{v}$ wirkt. Dieser kann wie im File „Eigenwerte und Eigenvektoren finden“ verändert werden indem man den roten Punkt an seiner Spitze bewegt. Der abgebildete Vektor $\vec{v_M}$ ist blau dargestellt. Die Abbildungsmatrix wird zeilenweise eingegeben. Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

wird im Eingabefeld `Abbildungsmatrix` auf folgende Weise geschrieben:

{{1, 2}, {3, 4}}

Mit Hilfe des Kontrollkästchens `Spur ein` können Sie angeben, ob der Verlauf der Vektorspitzen mitgezeichnet werden soll. Auf diese Weise können Sie Figuren zeichnen und sich ihre Abbildung ansehen. Um diese Zeichnung wieder zu löschen klicken Sie irgendwo auf das Koordinatensystem um bewegen Sie die Maus.

3 Eigenwerte berechnen

Wir haben im vorherigen Kapitel bereits gesehen, wie man auf Eigenwerte schließen kann. Jedoch funktioniert das anschauliche Bestimmen nur für 2×2-Matrizen oder womöglich für 3×3-Matrizen, die Abbildungen im dreidimensionalen Raum beschreiben. Doch wie bestimmen wir die Eigenwerte größerer Matrizen beziehungsweise auch komplexer Matrizen. Dazu wollen wir versuchen unsere Anfangsgleichung

$$Av = \lambda v$$

umzuformen und zu lösen. Wir können zuerst alle Terme auf eine Seite bringen.

$$Av - \lambda v = 0$$

Wir dürfen dabei nicht vergessen, dass A eine Matrix, v ein Vektor und λ ein Skalar ist. Daher müssen wir die Einheitsmatrix ergänzen, wenn wir v herausheben wollen.

$$(A - \lambda \mathbb{1})\, v = 0$$

Durch v dividieren dürfen wir nicht, da es keine Division bei Vektoren gibt. Damit diese Gleichung stimmt, muss einer der beiden folgenden Fälle erfüllt sein.

1. $v = 0$. Das ist jedoch ein sehr trivialer Fall. Wir wollen den Nullvektor als Eigenvektor verbieten, da er zu jeder Matrix Eigenvektor wäre und die Eigenwertgleichung somit auch für alle Zahlen erfüllt wäre.

2. $(A - \lambda \mathbb{1})\, v = 0$. Diesen Fall wollen wir uns nun genauer anschauen, da er uns dabei hilft Eigenwerte zu finden.

Die Matrix $\lambda \mathbb{1}$ besteht aus Nullen, nur die Elemente der Hauptdiagonalen sind λ. Wenn wir sie nun von der Matrix A abziehen, ändern sich lediglich die Hauptdiagonalelemente. Für eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

bedeutet das

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Vektor v, so erhalten wir

$$(A - \lambda \mathbb{1})\, v = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} - \lambda)v_x + a_{12}v_y \\ a_{21}v_x + (a_{22} - \lambda)v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die letzten beiden Ausdrücke beschreiben ein Gleichungssystem, dass zeilenweise gelesen werden kann. Die Unbekannten in diesem Gleichungssystem sind λ, v_x und v_y. Außerdem sind die beiden Gleichungen nicht linear. Das bedeutet, dass zwei Unbekannte nicht nur einzeln, sondern auch als Produkte voneinander auftreten. Ein solches Gleichungssystem zu lösen ist oft sehr schwierig. Es gibt allerdings einen einfachen Trick, der durch folgende Überlegung zustande kommt.
Die Matrix $(A - \lambda \mathbb{1})$ darf nicht invertierbar sein. Denn wenn sie invertierbar wäre, würde man durch Multiplikation mit der Inversen $v = 0$ erhalten, was wir für Eigenvektoren bereits ausgeschlossen haben. Für nicht invertierbare Matrizen verschwindet die Determinante. Wir können die Eigenwerte somit finden, indem wir

$$\det (A - \lambda \mathbb{1}) = 0 \tag{1}$$

lösen. Diese Gleichung entspricht dem Auffinden der Nullstellen eines Polynoms. Eine 2×2-Matrix hat somit stets zwei komplexe Eigenwerte. Die Determinante aus Gleichung (1) ergibt:

$$\det (A - \lambda \mathbb{1}) = (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{21} \cdot a_{12}$$

Man kann sich für 2×2-Matrizen merken: „Hauptdiagonale minus Nebendiagonale“. Dadurch entsteht ein Polynom, dass wir **charakteristisches Polynom** nennen. Um die Berechnung zu veranschaulichen und mögliche Fälle, die bei der Eigenwertberechnung auftreten können, zu diskutieren, wollen wir uns einige Beispiele aus dem letzten Kapitel ansehen.

3.1 Matrix B - Spiegelung um die x-Achse

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für die Determinante der Matrix $B - \lambda\mathbb{1}$ erhält man:

$$\det\left(B - \lambda\mathbb{1}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)$$

Aus dem Produkt-Null-Satz[1] erkennen wir leicht, dass $\lambda = 1$ beziehungsweise $\lambda = -1$ gilt. Zu diesem Ergebnis sind wir auch durch unsere geometrischen Überlegungen gekommen.

3.2 Matrix A - Streckung um den Faktor 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun wieder das charakteristische Polynom aufstellen. Es ergibt sich durch:

$$\det\left(A - \lambda\mathbb{1}\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$

Das charakteristische Polynom hat nun eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = 2$. Wir haben bereits durch die geometrische Überlegung gesehen, dass 2 ein Eigenwert sein muss. Auch die Vielfachheit eines Eigenwerts wird später von Bedeutung sein.

3.3 Matrix D -Drehung um 90° im Uhrzeigersinn

Bei der Drehung um 90° haben wir keinen Eigenwert gefunden. Wir wollen uns nun ansehen, wie das charakteristische Polynom in diesem Fall aussieht. Die einzige Vermutung war, dass wenn es einen Eigenwert gibt, dieser Betrag 1 haben muss. Zur Erinnerung:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir beginnen mit der Berechnung des charakteristischen Polynoms

$$\det\left(D - \lambda\mathbb{1}\right) = \det\begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^2 + 1$$

Nun müssen wir die Nullstellen dieses Polynoms finden, indem wir die Gleichung

$$(-\lambda)^2 + 1 = 0$$

[1] Das Produkt zweier Zahlen ist nur dann 0, wenn zumindest eine der beiden 0 ist.

lösen. Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$\lambda^2 = -1$$

Wir erhalten die Lösungen $\lambda = i$ und $\lambda = -i$. Eigenwerte können auch komplex sein. Geometrisch können wir uns diese leider nicht mehr vorstellen. In diesem Fall erscheint uns das Ergebnis durchaus logisch, wenn wir einen Vergleich mit der komplexen Zahlenebene wagen. Ein Vektor, der entlang der x-Achse gerichtet ist, wird auf einen Vektor entlang der y-Achse abgebildet und seine Länge bleibt unverändert. In der Gaußschen Zahlenebene entspricht die y-Achse dem imaginiären Anteil einer Zahl. Diese Vorstellung hinkt allerdings auch in manchen Punkten, weshalb wir ihr keine zu große Bedeutung zukommen lassen wollen.
Wir haben gesehen, dass alle Lösungsfälle quadratischer Gleichungen auch als mögliche Fälle von Eigenwerten auftreten können.

4 Eigenvektoren berechnen

Im letzten Kapitel haben wir besprochen, wie man die Eigenwerte berechnen kann. Nun wollen wir uns an die Eigenvektoren wagen. Wichtig ist, dass ein Eigenvektor immer zu einem bestimmten Eigenwert gehört. Daher können wir jenes λ, dass wir bei der Berechnung der Eigenwerte erhalten haben direkt einsetzten. Wenn es zwei verschiedene Eigenwerte gibt suchen wir die Eigenvektoren der Reihe nach, wie in den anschließenden Beispielen zu sehen ist.
Wir beginnen wie gehabt mit der Eigenwertgleichung

$$(A - \lambda \mathbb{1})\, v = 0$$

Da wir die Eigenwerte λ bereits kennen, handelt es sich bei $A - \lambda\mathbb{1}$ um eine bekannte Matrix. Um nun die Eigenvektoren zu berechnen, müssen wir nur noch das Gleichungssystem lösen, dass uns die Eigenwertgleichung vorgibt. Wir werden zu den Beispielen aus dem letzten Kapitel nun auch die Eigenvektoren berechnen.

4.1 Matrix B - Spiegelung um die x-Achse

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir beginnen nun mit dem ersten Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Für diesen Eigenwert müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$(B - \lambda_1 \mathbb{1})\, v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da wir ja eine ganze Schar an Eigenvektoren bekommen (alle, die in eine bestimmte Richtung zeigen) ist dieses Gleichungssystem nie eindeutig lösbar. Sollte es also doch eindeutig lösbar sein, weiß man, dass man sich verrechnet hat. Das Gleichungssystem kann durch Multiplikation der Matrix und des Vektors auch in nachstehender Form geschrieben werden.

$$\begin{aligned} 0x + 0y &= 0 \\ 0x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung stimmt für alle x und alle y. Die zweite Gleichung gibt vor, dass $y = 0$ gelten muss. Daher sind alle Vektoren der Form $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren. Üblicherweise gibt man einen Vertreter dieser Schar an. Meist entscheidet man sich für den Einheitsvektor. Der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Berechnen des zweiten Eigenvektors funktioniert analog. Wir berechnen nun den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$.

$$(B - \lambda_2 \mathbb{1})\, v = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das zu lösende Gleichungssystem ist somit:

$$\begin{aligned} 2x + 0y &= 0 \\ 0x + 0y &= 0 \end{aligned}$$

Hier muss nun wegen der ersten Gleichung $x = 0$ gelten. Für y gibt es nun keine Einschränkungen. Wir entscheiden uns auch hier für einen Einheitsvektor. Der Einheitsvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ ist

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Eigenvektoren haben wir bereits aus unseren geometrischen Überlegungen erhalten.

4.2 Matrix A - Streckung um den Faktor 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir haben bereits gesehen, dass nur der Eigenwert 2 auftritt, da jeder Vektor verdoppelt wird. Somit sollte auch mathematisch jeder Vektor Eigenvektor sein. Wir setzten $\lambda = 2$ in die Eigenwertgleichung ein und erhalten:

$$(A - \lambda \mathbb{1})v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man erkennt sofort, dass diese Gleichung für jeden Vektor v erfüllt ist. Doch wie entscheiden wir, welche Eigenvektoren wir exemplarisch für alle anderen angeben wollen? Da der Eigenwert λ die Vielfachheit 2 besitzt wollen wir zwei linear unabhängige Eigenvektoren angeben. Wir entscheiden uns für die bereits bekannten Basisvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3 Matrix D - Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir beginnen mit dem ersten Eigenwert $\lambda_1 = i$. Für komplexe Eigenwerte gehen wir genauso vor wie für reelle, müssen jedoch auf die Rechenregeln für komplexe Zahlen achten.

$$(D - \lambda_1 \mathbb{1})v = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass die zweite Zeile das i-fache der ersten Zeile der Matrix ist. Somit ist eine eindeutige Lösung auch hier ausgeschlossen. Das zugehörige Gleichungssystem hier wäre

$$\begin{aligned} -ix - 1y &= 0 \\ 1x - iy &= 0 \end{aligned}$$

Aus jeder der beiden Gleichungen folgt für sich

$$y = -ix$$

Jeder Vektor für den dieser Zusammenhang zwischen seinen Koordinaten gilt ist Eigenvektor. Am leichtesten findet man einen solchen, wenn man für $x = 1$ setzt. Man erhält durch normieren den folgenden Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = i$:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Jedes komplexe Vielfache dieses Vektors ist ebenfalls ein Eigenvektor.

Wir wollen nun auch die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -i$ berechnen. Dazu setzten wir diesen Eigenwert in die Eigenwertgleichung ein.

$$(D - \lambda_2 \mathbb{1})v = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist nun die zweite Zeile das $-i$-fache der ersten Zeile. Als Gleichungssystem geschrieben ergibt sich:

$$\begin{aligned} ix - 1y &= 0 \\ 1x + iy &= 0 \end{aligned}$$

Jede Gleichung für sich umgeformt, ergibt

$$ix = y$$

Wenn wir $x = 1$ setzen, erhält man als normierten Eigenvektor zum Eigenwert λ_2

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Man könnte auch hier jedes andere Zahlenpaar verwenden, dass obiges Gleichungssystem löst (Ü2).

5 Der Eigenraum

Wir haben in den letzten Kapiteln bereits gesehen, dass wir eine Schar an Eigenvektoren bekommen. Diese Schar wollen wir nun etwas genauer als nur durch einen Vertreter angeben. Wir werden dafür den jeweiligen Untervektorraum angeben. Das bedeutet, dass wir alle Vielfachen des Vektors beschreiben wollen. Doch zuerst werden wir uns über den Begriff **Untervektorraum** Gedanken machen.

Im Baustein „Vektoren“ haben wir bereits besprochen worum es sich bei einem Vektorraum handelt. Ein Untervektorraum erfüllt für sich selbst genau dieselben Axiome wie der Vektorraum. Wichtig ist, dass man durch Addition und skalarer Multiplikation den Untervektorraum nicht verlassen kann. Der Untervektorraum hat im Allgemeinen eine kleinere Dimension als der ursprüngliche Vektorraum.

Wir kennen Untervektorräume bereits aus der Schule, haben sie dort jedoch nicht als solche bezeichnet. Beispielsweise ist eine Ebene (die den Ursprung enthält) ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Wenn wir zwei Vektoren dieser Ebene addieren oder mit Skalaren multiplizieren, wird auch der resultierende Vektor Teil der Ebene sein. Um sich das zu veranschaulichen zeichnen Sie zwei beliebige Vektoren auf ein Blatt Papier. Addieren Sie diese beiden Vektoren graphisch, wie wir es auch im Baustein „Vektoren" gemacht haben. Sie werden sehen, dass auch der neue Vektor auf dem Papier ist und nicht etwa im Raum schwebt. Dasselbe gilt auch für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Man verlässt nie die Gerade auf der der ursprüngliche Vektor lag. Vergleichen Sie dies mit der Parameterdarstellung einer Geraden beziehungsweise einer Ebene, wie Sie, sie in der Schule gelernt haben. Diese Eigenschaft wird **Abgeschlossenheit** genannt.

Wir werden die formale Definition des Untervektorraums hier weglassen. Allerdings wollen wir die für uns wichtigsten (Unter-)vektorräume zusammenfassen:

- *Dimension 0:* Dieser Vektorraum besteht nur aus dem Nullvektor. Er ist Untervektorraum jedes anderen Vektorraums. Da wir den Nullvektor als Eigenvektor ausgeschlossen haben, werden wir diesen Fall hier nicht mehr weiter betrachten.
- *Dimension 1:* Unter einem eindimensionalen (Unter-)vektorraum versteht man einen Vektorraum, der durch nur einen Vektor aufgespannt wird. Daher besteht die Basis hier aus nur einem Vektor. Jede Gerade, die durch den Nullpunkt geht kann auf diese Weise beschrieben werden.
- *Dimension 2:* Bei einem zweidimensionalen (Unter)-vektorraum handelt es sich um eine Ebene, die den Nullpunkt beinhaltet. Eine solche Ebene wird durch zwei Vektoren aufgespannt, sie besitzt somit eine Basis aus zwei Elementen.
- *Dimension 3 (und höher):* Der dreidimensionale Untervektorraum wird von drei Basisvektoren aufgespannt. Auch dieser muss den Ursprung enthalten um als Untervektorraum eines beispielsweise 4-dimensionalen Vektorraums in Frage zu kommen. Mathematisch gesehen kann man auch noch höhere Räume und deren Untervektorräume betrachten.

Anstelle eines bestimmten Eigenvektors wollen wir nun die Eigenräume angeben. Da wir größtenteils 2×2-Matrizen betrachtet haben werden die Untervektorräume Geraden oder Ebenen sein.

5.1 Matrix B - Spiegelung um die x-Achse

Wir haben bereits die Eigenwerte sowie die Eigenvektoren berechnet. Nun wollen wir zu jedem der Eigenwerte auch die Eigenräume angeben. Für $\lambda_1 = 1$ ist der zugehörige

Eigenraum

$$E_B(\lambda_1) = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ein solcher Eigenraum wird als Gerade verstanden. Die Form ähnelt auch der aus der Schule bekannten Parameterdarstellung

$$X = P + t \cdot v$$

für Geraden. Da wir im Gegensatz zur analytischen Geometrie nur Geraden erlauben, die durch den Ursprung verlaufen, ist der Punkt P der Nullpunkt und wird daher weggelassen. Außerdem geht es uns vorrangig um die Gerade selbst und nicht um die Punkte, die auf ihr liegen, weshalb wir auch den Punkt X nicht anschreiben. Es handelt sich somit um eine sehr verkürzte Geradengleichung.
Für den Eigenwert $\lambda_2 = -1$ haben wir den Eigenraum

$$E_B(\lambda_2) = \left\{ t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

gefunden. Auch dieser entspricht einer Geraden.

Unsere beiden Eigenräume spannen die x-Achse beziehungsweise die y-Achse auf. Gemeinsam, dass heißt würden wir sie addieren, spannen sie daher die gesamte Ebene auf. Wir sagen die Matrix B besitzt eine Basis aus Eigenvektoren. Wir werden in späteren Bausteinen noch darauf zu sprechen kommen.

5.2 Matrix A - Streckung um den Faktor 2

In diesem Fall hatten wir nur einen Eigenwert $\lambda = 2$. Zu diesem Eigenwert hatten wir zwei linear unabhängige, also nicht parallele, Eigenvektoren gefunden. Jede Linearkombination der beiden Vektoren ist wieder ein Eigenvektor. Wir spannen durch den Eigenraum

$$E_A(\lambda) = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

die gesamte Ebene auf. Diese Darstellung ist nun vergleichbar mit der aus der Schule bekannten Ebenengleichung in Parameterdarstellung

$$X = P + t \cdot v_1 + s \cdot v_2$$

Dabei werden dieselben Vereinfachungen für X und P verwendet, die wir bereits oben besprochen haben. Da ohnehin jeder Vektor Eigenvektor ist, können wir leicht eine Basis aus Eigenvektoren aufstellen.

5.3 Matrix D - Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn

Wir hatten hier zwei komplexe Eigenwerte und auch komplexe Eigenvektoren erhalten. Abgesehen davon funktioniert das Aufstellen der Eigenräume analog zur Matrix B. Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = i$ ist

$$E_D(\lambda_1) = \left\{ \frac{t_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \middle| \, t_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

und der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = -i$

$$E_D(\lambda_2) = \left\{ \frac{t_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \middle| \, t_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

Wir haben gesehen, dass auch die Vielfachheit eines Eigenwerts von Bedeutung ist. So kann der entsprechende Eigenraum eine Gerade oder auch eine Ebene bilden.

Übungsbeispiele

$$\left| \begin{matrix} EV \\ EW \end{matrix} \right\rangle$$

Ü1 Beschreiben Sie wie sich die Eigenvektoren von B_y verhalten.

Ü2 Überprüfen Sie, ob die Eigenvektoren der Matrix D bezüglich des komplexen Skalarprodukts aufeinander normal stehen.

Ü3 Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die Eigenvektoren der Matrix $M = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

*Ü4 Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Ü5 Berechnen Sie die Eigenwerte, sowie die Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Was fällt Ihnen bei der Berechnung der Eigenvektoren auf?

Die mit Stern (*) gekennzeichnete Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe und erfordert die Kenntnis darüber, wie man die Determinante einer $3 \times 3-$Matrix berechnet.